Über die

Drehung eines starren Körpers

um seinen Schwerpunkt

bei Wirkung äusserer Kräfte.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde

bei der Philosophischen Fakultät (II. Sektion) der k. b. Ludwig-Maximilians-Universität München

eingereicht von

OSKAR PERRON

am 3. Februar 1902.

MÜNCHEN 1902.

Kgl. Hof- und Universitäts-Buchdruckerei von Dr. C. Wolf & Sohn.

Über die

Drehung eines starren Körpers

um seinen Schwerpunkt

bei Wirkung äusserer Kräfte.

Inaugural-Dissertation

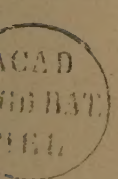
zur Erlangung der Doktorwürde

bei der Philosophischen Fakultät (II. Sektion) der k. b. Ludwig-Maximilians-Universität München

eingereicht von

OSKAR PERRON

am 3. Februar 1902.



MÜNCHEN 1902.

Kgl. Hof- und Universitäts-Buchdruckerei von Dr. C. Wolf & Sohn.

§ 1.

Die Differentialgleichungen des Problems.

Die Aufgabe, deren Lösung wir behandeln wollen, lässt sich folgendermassen formulieren: In einer im Raum festen Ebene sei eine Masse m gleichmässig auf die Peripherie eines Kreises vom Radius r verteilt und wirke nach dem Newton'schen Gravitationsgesetz auf einen starren Körper, dessen Schwerpunkt im Mittelpunkt des genannten Kreises fest bleibt. Dabei wollen wir voraussetzen, dass die Dimensionen des starren Körpers sehr klein seien im Vergleich zum Radius r des Kreises.

Wir wählen ein im Raum festes Coordinatensystem X, Y, Z, dessen Anfangspunkt im Mittelpunkt des Kreises liegt und dessen Z-Achse senkrecht steht auf der Ebene dieses Kreises. Ein zweites Coordinatensystem Ξ, H, Z sei mit dem starren Körper fest verbunden, und zwar sollen die Achsen mit den drei Hauptträgheitsachsen des Schwerpunkts zusammenfallen.

Sind nun x, y, z die Coordinaten irgend eines Punktes des Körpers in Bezug auf das erste Achsensystem; ξ, η, ζ die Coordinaten desselben Punktes in Bezug auf das zweite, so bestehen zwischen diesen Grössen die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\zeta \\ y &= \beta_1\xi + \beta_2\eta + \beta_3\zeta \\ z &= \gamma_1\xi + \gamma_2\eta + \gamma_3\zeta \end{aligned} \tag{1.}$$

wobei die Coefficienten bekannten Relationen genügen müssen.

Mit p_1, p_2, p_3 seien die Rotationsgeschwindigkeiten um die Hauptträgheitsachsen bezeichnet, ferner mit q_1, q_2, q_3 die Rotationsgeschwindigkeiten um die im Raum festen Achsen, endlich mit t die Zeit. Dann besteht bekanntlich folgendes System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{dt} &= \alpha_2 p_3 - \alpha_3 p_2; \quad \frac{d\alpha_2}{dt} = \alpha_3 p_1 - \alpha_1 p_3; \quad \frac{d\alpha_3}{dt} = \alpha_1 p_2 - \alpha_2 p_1 \\ \frac{d\beta_1}{dt} &= \beta_2 p_3 - \beta_3 p_2; \quad \frac{d\beta_2}{dt} = \beta_3 p_1 - \beta_1 p_3; \quad \frac{d\beta_3}{dt} = \beta_1 p_2 - \beta_2 p_1 \\ \frac{d\gamma_1}{dt} &= \gamma_2 p_3 - \gamma_3 p_2; \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = \gamma_3 p_1 - \gamma_1 p_3; \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1 p_2 - \gamma_2 p_1; \end{aligned} \tag{2.}$$

ferner ist

$$q_1 = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3; \quad q_2 = \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 + \beta_3 p_3; \quad q_3 = \gamma_1 p_1 + \gamma_2 p_2 + \gamma_3 p_3. \tag{3.}$$

Bezeichnen wir weiter die drei Hauptträgheitsmomente für den Schwerpunkt mit A_1, A_2, A_3 so kommen zur Lösung unserer Aufgabe noch die drei Gleichungen hinzu

$$\begin{aligned} A_1 \frac{dp_1}{dt} &= (A_2 - A_3)\, p_2 p_3 + M_\xi \\ A_2 \frac{dp_2}{dt} &= (A_3 - A_1)\, p_3 p_1 + M_\eta \\ A_3 \frac{dp_3}{dt} &= (A_1 - A_2)\, p_1 p_2 + M_\zeta \end{aligned} \qquad (4.)$$

unter M_ξ, M_η, M_ζ die Drehungsmomente der wirkenden Kraft um die Hauptträgheitsachsen verstanden.

Ist f die Constante des Gravitationsgesetzes, und $d\mu$ die Masse eines Körperelementes mit den Coordinaten x, y, z, bez. ξ, η, ζ, so übt die auf den Kreis vom Radius r verteilte Masse m auf dieses Körperelement eine Kraft aus, deren Componenten in Richtung der im Körper festen Achsen die folgenden sind:

$$\Xi = \frac{fmd\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\varrho^3} [r(\alpha_1 \cos\varphi + \beta_1 \sin\varphi) - \xi]$$

$$H = \frac{fmd\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\varrho^3} [r(\alpha_2 \cos\varphi + \beta_2 \sin\varphi) - \eta]$$

$$Z = \frac{fmd\mu}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\varrho^3} [r(\alpha_3 \cos\varphi + \beta_3 \sin\varphi) - \zeta]$$

wobei $\varrho^2 = (r\cos\varphi - x)^2 + (r\sin\varphi - y)^2 + z^2$ ist.

Macht man nun, wie oben vorausgeschickt, die Annahme, dass die Dimensionen des Körpers sehr klein sind im Vergleich zu r, so kann man setzen

$$\frac{1}{\varrho^3} = \frac{1}{r^3} + \frac{3}{r^4}(x\cos\varphi + y\sin\varphi),$$

wodurch die obigen Integrale auswertbar werden. Man findet so

$$\begin{aligned} \Xi &= \frac{fmd\mu}{r^3}\left(\frac{3}{2} x\alpha_1 + \frac{3}{2} y\beta_1 - \xi\right) = -\frac{fmd\mu}{r^3}\left(\frac{3}{2} z\gamma_1 - \frac{1}{2}\xi\right) \\ H &= \frac{fmd\mu}{r^3}\left(\frac{3}{2} x\alpha_2 + \frac{3}{2} y\beta_2 - \eta\right) = -\frac{fmd\mu}{r^3}\left(\frac{3}{2} z\gamma_2 - \frac{1}{2}\eta\right) \\ Z &= \frac{fmd\mu}{r^3}\left(\frac{3}{2} x\alpha_3 + \frac{3}{2} y\beta_3 - \zeta\right) = -\frac{fmd\mu}{r^3}\left(\frac{3}{2} z\gamma_3 - \frac{1}{2}\zeta\right). \end{aligned}$$

Vermöge dieser Werte für die Kraftcomponenten ergibt sich

$$M_\xi = \Sigma(\eta Z - \zeta H) = \frac{3}{2}\frac{fm}{r^3}\Sigma d\mu\,(\gamma_2\zeta - \gamma_3\eta)\,z$$
$$= \frac{3}{2}\frac{fm}{r^3}\Sigma d\mu\,(\gamma_2\zeta - \gamma_3\eta)\,(\gamma_1\xi + \gamma_2\eta + \gamma_3\zeta)$$

wobei die Summation über alle Massenelemente des starren Körpers zu erstrecken ist.

Da aber die im Körper festen Achsen mit den Hauptträgheitsachsen zusammenfallen, so ist

$$\Sigma d\mu\,(\eta^2 + \zeta^2) = A_1;\ \Sigma d\mu\,(\zeta^2 + \xi^2) = A_2;\ \Sigma d\mu\,(\xi^2 + \eta^2) = A_3$$
$$\Sigma d\mu\,\eta\zeta = 0\ ;\qquad \Sigma d\mu\,\zeta\xi = 0\ ;\qquad \Sigma d\mu\,\xi\eta = 0.$$

Mit Rücksicht darauf ergibt sich

$$M_\xi = \frac{3}{2}\frac{fm}{r^3}(A_2 - A_3)\,\gamma_2\gamma_3$$

woraus durch cyklische Vertauschung auch die andern Drehungsmomente hervorgehen.

Führt man die gefundenen Werte in Gleichung (4.) ein, und setzt noch zur Abkürzung

$$\frac{3}{2}\frac{fm}{r^3} = k^2,$$

so werden die Differentialgleichungen des Problems die folgenden:

$$A_1\frac{dp_1}{dt} = (A_2 - A_3)\,(p_2p_3 + k^2\gamma_2\gamma_3)$$
$$A_2\frac{dp_2}{dt} = (A_3 - A_1)\,(p_3p_1 + k^2\gamma_3\gamma_1) \qquad (5.)$$
$$A_3\frac{dp_3}{dt} = (A_1 - A_2)\,(p_1p_2 + k^2\gamma_1\gamma_2)$$

wozu noch die Gleichungen (2.) kommen.

Auf dieses System von Differentialgleichungen hat W. Voigt*) das Problem zurückgeführt, und auch drei erste Integrale abgeleitet. Die weitere Behandlung beschränkt sich jedoch auf den speciellen Fall $A_1 = A_2$, und gibt auch hiervon nur eine partikuläre Lösung. Nun hat Herr Prof. Lindemann darauf hingewiesen**), dass die Gleichungen (5.) und (2.) sich als besonderer Fall eines Systems von Differentialgleichungen darstellen, welches Clebsch***) bei Behandlung einer hydrodynamischen Aufgabe auf Quadraturen zurückgeführt hat. Für den Specialfall $A_1 = A_2$ ist diese hydrodynamische Aufgabe von Kirchhoff durch elliptische Funktionen vollständig gelöst.†) Das allgemeine Problem hat weiterhin eine Behandlung gefunden durch H. Weber††), welcher unter einer

*) W. Voigt: Elementare Mechanik pag. 243 f.

**) Sitzungsberichte d. kgl. bayer. Akad. d. Wiss. 1893 Bd. XXVIII. Heft II. pag 200.

***) Clebsch: Über die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit. Math. Annalen Bd. 3.

†) Crelles Journal Bd. 71. pag. 237 ff.

††) Math. Annalen Bd. 14. pag. 173 ff.

beschränkenden Voraussetzung über den Anfangszustand (die auch von Clebsch a. a. O. gemacht wird) die vollständige Integration mittels Thetafunktionen von zwei Variabeln durchführt, und diese Lösung durch das Umkehrproblem der Abel'schen Integrale auf die Clebsch'schen Quadraturen zurückführt. Von F. Kötter ist endlich gezeigt*), dass auch im allgemeinsten Fall das Problem durch Thetafunktionen von zwei Variabeln gelöst werden kann.

Unser Rotationsproblem lässt nun in jedem Falle eine analoge Behandlung zu. Im folgenden sollen die betreffenden Entwicklungen für den allgemeinsten Fall durchgeführt werden, also ohne jede Voraussetzung über die Constanten A_1, A_2, A_3 oder über den Anfangszustand. Herr Kötter drückt in seiner erwähnten Abhandlung zunächst die Richtungscosinus und die Componenten der Rotationsgeschwindigkeit durch ultraelliptische Funktionen eines Wertepaares x_1, x_2 aus. Sind sodann $w_1(x)$ und $w_2(x)$ die beiden ultraelliptischen Normal-Integrale erster Gattung, so ergeben sich die Summen

$$w_1(x_1) + w_1(x_2) \text{ und } w_2(x_1) + w_2(x_2)$$

als lineare ganze Funktionen der Zeit, und daraus entspringt nach bekannten Formeln die Darstellung durch Thetafunktionen, deren Argumente eben diese linearen Funktionen der Zeit sind. Die folgenden Ausführungen weichen von dieser Methode insofern ab, als die Unbekannten direkt durch Thetafunktionen ausgedrückt werden, ohne dass zuvor die Einführung ultraelliptischer Integrale nötig würde. Dadurch können manche, zum Teil umständliche Entwicklungen, die Herr Kötter anstellen muss, unterdrückt werden (so der ganze § 6 jener Abhandlung), während dagegen einige Eigenschaften der Thetafunktionen benützt werden müssen, die auch an sich vielleicht nicht ohne Interesse sind. Diese Formeln wollen wir zunächst im folgenden Paragraphen entwickeln.

§ 2.

Über einige Eigenschaften der Thetafunktionen.

Die Thetafunktion mit der Charakteristik $\begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{pmatrix}$ definieren wir im Anschluss an Riemann und H. Weber durch die doppelt unendliche Reihe

$$\vartheta \begin{pmatrix} g_1 g_2 \\ h_1 h_2 \end{pmatrix} (v w) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\varphi \left(m + \frac{g_1}{2},\, n + \frac{g_2}{2}\right) + \left(m + \frac{g_1}{2}\right)(2v + h_1 \pi i) + \left(n + \frac{g_2}{2}\right)(2w + h_2 \pi i)}$$

wobei $\varphi(x, y) = \tau_{11} x^2 + 2\tau_{12} xy + \tau_{22} y^2$

eine Funktion ist, deren reeller Teil stets negativ ist. Die Zahlen g_1, g_2, h_1, h_2 sind 0 oder 1.

Die so definierte Thetafunktion ist, abgesehen von einem konstanten Faktor, die einzige für keinen endlichen Wert der Variabeln v und w unendlich werdende und überall eindeutige analytische Funktion, welche den Funktionalgleichungen genügt

$$\vartheta(v + i\pi, w) = (-1)^{g_1} \vartheta(v, w)$$
$$\vartheta(v, w + i\pi) = (-1)^{g_2} \vartheta(v, w)$$
$$\vartheta(v + \tau_{11}, w + \tau_{12}) = (-1)^{h_1} \cdot e^{-\tau_{11} - 2v} \cdot \vartheta(v, w)$$
$$\vartheta(v + \tau_{21}, w + \tau_{22}) = (-1)^{h_2} \cdot e^{-\tau_{22} - 2w} \cdot \vartheta(v, w) \qquad (\tau_{21} = \tau_{12})$$

*) Crelles Journal Bd. 109. pag. 51–81 und 89–111.

Die Charakteristik $\begin{pmatrix} g_1 g_2 \\ h_1 h_2 \end{pmatrix}$ heisse gerade oder ungerade, je nachdem $g_1 h_1 + g_2 h_2 \equiv 0$ oder 1 (mod. 2) ist.

Die beiden Charakteristiken $\begin{pmatrix} g_1 g_2 \\ h_1 h_2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} g_2 g_1 \\ h_2 h_1 \end{pmatrix}$ mögen symmetrisch genannt werden.

Als Summe zweier Charakteristiken $\begin{pmatrix} g_1 g_2 \\ h_1 h_2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} g_1' g_2' \\ h_1' h_2' \end{pmatrix}$ bezeichnen wir die Charakteristik $\begin{pmatrix} g_1 + g_1' & g_2 + g_2' \\ + h_1' & h_2 + h_2' \end{pmatrix}$ und schreiben demgemäss

$$\begin{pmatrix} g_1 g_2 \\ h_1 h_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1' g_2' \\ h_1' h_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 + g_1' & g_2 + g_2' \\ h_1 + h_1' & h_2 + h_2' \end{pmatrix}$$

wobei auf der rechten Seite an Stelle der Summen die kleinsten Reste mod. 2 zu treten haben.

Bezeichnen wir irgend welche Charakteristiken einfach durch (α_1), (α_2), $(\alpha_3)\ldots$, und ist die Summe derselben dargestellt durch die bestimmte Charakteristik $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, so schreiben wir einfach

$$(\alpha_1) + (\alpha_2) + (\alpha_3) + \cdots = 0$$

Nach unsern Definitionen sind die zehn Thetafunktionen mit gerader Charakteristik gerade Funktionen, dagegen die sechs mit ungerader Charakteristik auch ungerade Funktionen. Sind die Argumente rein imaginär, so haben bei reellen Periodicitätsmoduln alle sechzehn Thetafunktionen reelle Werte. Dagegen sind für reelle Argumente nur die zehn geraden reell, die ungeraden rein imaginär.

Für die Vermehrung der Argumente um konjugierte halbe Perioden gilt die Formel

$$\vartheta\left(v + \varepsilon_1 \frac{\pi i}{2} + \zeta_1 \frac{\tau_{11}}{2} + \zeta_2 \frac{\tau_{12}}{2},\ w + \varepsilon_2 \frac{\pi i}{2} + \zeta_1 \frac{\tau_{21}}{2} + \zeta_2 \frac{\tau_{22}}{2}\right)$$

$$= \pm e^{-M} \cdot \vartheta \begin{pmatrix} g_1 + \zeta_1 & g_2 + \zeta_2 \\ h_1 + \varepsilon_1 & h_2 + \varepsilon_2 \end{pmatrix} (v\, w)$$

wobei $M = \frac{\zeta_1^2}{4}\tau_{11} + \frac{\zeta_1 \zeta_2}{2}\tau_{12} + \frac{\zeta_2^2}{4}\tau_{22} + \zeta_1 v + \zeta_2 w + \left[\frac{\zeta_1}{2}(\varepsilon_1 + h_1) + \frac{\zeta_2}{2}(\varepsilon_2 + h_2)\right] \pi i.$

Das Vorzeichen ist hierin stets das positive, wenn

$$h_1 + \varepsilon_1 < 2;\ h_2 + \varepsilon < 2$$

es ist dagegen $(-1)^{\zeta_1 + g_1}$ für $h_1 + \varepsilon_1 = 2;\ h_2 + \varepsilon_2 < 2$

$(-1)^{\zeta_2 + g_2}$ für $h_1 + \varepsilon_1 < 2;\ h_2 + \varepsilon_2 = 2$

$(-1)^{\zeta_1 + g_1 + \zeta_2 + g_2}$ für $h_1 + \varepsilon_1 = 2;\ h_2 + \varepsilon_2 = 2.$

Wegen dieser Formel für die Vermehrung um halbe Perioden möge das Halbperiodenpaar

$$\varepsilon_1\frac{\pi i}{2}+\zeta_1\frac{\tau_{11}}{2}+\zeta_2\frac{\tau_{12}}{2};\quad \varepsilon_2\frac{\pi i}{2}+\zeta_1\frac{\tau_{21}}{2}+\zeta_2\frac{\tau_{22}}{2}$$

kurz als zur Charakteristik $\begin{pmatrix}\zeta_1 & \zeta_2\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{pmatrix}$ gehörig bezeichnet werden.

Thetafunktionen, deren beide Argumente null sind, bezeichnen wir in der üblichen Weise dadurch, dass wir die Argumente unterdrücken: $\vartheta(\alpha)(0,0) = \vartheta(\alpha)$.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen gehen wir nun über zur Entwicklung der am Ende des vorigen Paragraphen erwähnten Formeln. Die Basis für unsere Untersuchungen bildet ein Theorem, das man Caspary verdankt und das sich folgendermassen aussprechen lässt:*)

Ordnet man die sechzehn Charakteristiken in das determinantenförmige System

$$\begin{matrix}
-\binom{00}{00} & \binom{01}{01} & \binom{10}{11} & \binom{11}{10}\\
\binom{10}{10} & -\binom{11}{11} & \binom{00}{01} & \binom{01}{00}\\
\binom{01}{11} & \binom{00}{10} & \binom{11}{00} & -\binom{10}{01}\\
\binom{11}{01} & \binom{10}{00} & -\binom{01}{10} & \binom{00}{11}
\end{matrix} \qquad (1.)$$

und setzt hierin an Stelle jeder Charakteristik (α) die Funktion $\vartheta(\alpha)(v_0 w_0)\cdot\vartheta(\alpha)(v w)$ mit dem beigeschriebenen Vorzeichen, wobei v_0, w_0, v, w beliebige Variable sind, so sind die Elemente des Systems den Coefficienten einer orthogonalen Coordinatentransformation im vierdimensionalen Raum proportional. Caspary gibt a. a. O. eine etwas andere Anordnung der Elemente an, aus der jedoch die obige einfach durch Reihenvertauschung hervorgeht; unser System ist dadurch ausgezeichnet, dass je zwei symmetrische Charakteristiken zur Hauptdiagonale symmetrisch liegen.

Aus diesem Theorem entspringt sofort eine grosse Anzahl von Folgerungen, von denen wir einige als besonders wichtig hervorheben wollen:

I. Die Summe der Quadrate der Elemente einer beliebigen Reihe ist gleich der Summe aus den Quadraten der Elemente jeder andern Horizontal- und Vertikalreihe.

II. Multipliciert man die Elemente einer beliebigen Horizontalreihe mit den entsprechenden Elementen einer andern Horizontalreihe, so ist die Summe dieser Produkte gleich null; und dasselbe gilt auch von den Vertikalreihen.

III. Die Summe der Quadrate von vier Elementen, welche ihrer Anordnung nach eine Unterdeterminante zweiter Ordnung bilden, ist gleich der Summe aus den vier Quadraten derjenigen Elemente, welche in der korrespondierenden Unterdeterminante stehen.

IV. Bildet man aus den Elementen von 1. eine beliebige Unterdeterminante zweiter Ordnung, so ist diese gleich ihrer korrespondierenden Unterdeterminante (und zwar ohne Aenderung des Vorzeichens).

---

*) Vgl. Caspary: Zur Theorie der Thetafunktionen mit zwei Argumenten: Crelles Journal Bd. 94. pag. 74. ff.

Bezeichnet man nun durch i_ν und $i_{\nu'}$ gewisse Potenzen von i, so liefern die Sätze I und III 30 Formeln von der Gestalt

$$\sum_1^4{}^\nu \left\{ i_\nu^2 \, \vartheta^2(\varepsilon_\nu)(v_0, w_0) \, \vartheta^2(\varepsilon_\nu)(v, w) + i_{\nu'}^2 \, \vartheta^2(\delta_\nu)(v_0, w_0) \, \vartheta^2(\delta_\nu)(v, w) \right\} = 0,$$

während aus den Sätzen II und IV mit Beibehaltung der Bezeichnung die folgenden 30 hervorgehen:

$$\sum_1^4{}^\nu \, i_\nu \, i_{\nu'} \, \vartheta(\varepsilon_\nu)(v_0, w_0) \, \vartheta(\varepsilon_\nu)(v, w) \, \vartheta(\delta_\nu)(v_0, w_0) \, \vartheta(\delta_\nu)(v, w) = 0.$$

Diese beiden Formeltypen lassen sich offenbar in eine einzige vereinigen, nämlich in

$$\sum_1^4{}^\nu \left\{ i_\nu \, \vartheta(\varepsilon_\nu)(v_0, w_0) \, \vartheta(\varepsilon_\nu)(v, w) \pm i_{\nu'} \, \vartheta(\delta_\nu)(v_0, w_0) \, \vartheta(\delta_\nu)(v, w) \right\}^2 = 0. \qquad (2.)$$

Beiläufig sei erwähnt, was leicht einzusehen, dass ausser diesen 30 Formeln keine weiteren vom selben Typus existieren können.

Vermehrt man in Gleichung (2.) das Argumentenpaar v_0, w_0 um die zur Charakteristik $(\varepsilon_\nu) + (\delta_\nu)$, die vom Index ν unabhängig ist, gehörigen halben Perioden, so findet man, dass alle 30 Gleichungen die folgende einfachere Form annehmen:

$$\sum_1^4{}^\nu \, i_\nu^2 \left\{ \vartheta(\delta_\nu)(v_0, w_0) \, \vartheta(\varepsilon_\nu)(v, w) \pm \vartheta(\varepsilon_\nu)(v_0, w_0) \, \vartheta(\delta_\nu)(v, w) \right\}^2 = 0. \qquad *) \qquad (3.)$$

Die Charakteristiken (ε_ν) und (δ_ν) zeigen einige bemerkenswerte Eigenschaften. Wie schon hervorgehoben, ist

$$(\varepsilon_1) + (\delta_1) = (\varepsilon_2) + (\delta_2) = (\varepsilon_3) + (\delta_3) = (\varepsilon_4) + (\delta_4),$$

woraus auch folgt

$$(\varepsilon_\nu) + (\varepsilon_\varkappa) = (\delta_\nu) + (\delta_\varkappa)$$
$$(\varepsilon_\nu) + (\delta_\varkappa) = (\delta_\nu) + (\varepsilon_\varkappa).$$

Ferner kann man dadurch, dass man eventuell ein (ε_ν) mit (δ_ν) vertauscht, stets erreichen, dass

$$(\varepsilon_1) + (\varepsilon_2) + (\varepsilon_3) + (\varepsilon_4) = 0$$
$$(\delta_1) + (\delta_2) + (\delta_3) + (\delta_4) = 0$$

ist. Bezeichnen dann $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ die Zahlen 1, 2, 3, 4 in irgend einer Reihenfolge, so gibt es bei dieser Wahl stets eine Charakteristik, welche von jeder der vier Charakteristiken $(\varepsilon_\varkappa)$, (ε_λ), (ε_μ), (δ_ν) um eine ungerade Charakteristik differiert; mit andern Worten: Es gibt ein Halbperiodenpaar, für welches die vier Thetafunktionen mit den Charakteristiken $(\varepsilon_\varkappa)$, (ε_λ), (ε_μ), (δ_ν) gleichzeitig verschwinden. Und genau dasselbe gilt auch von $(\delta_\varkappa)$, (δ_λ), (δ_μ), (ε_ν).

Die 30 Formeln (3.) scheiden sich in zwei Gruppen zu je 15. Die erste Gruppe ist dadurch ausgezeichnet, dass jeder Term der Summe eine gerade und eine ungerade Charakteristik enthält. Die zweite Gruppe hat die Eigenschaft, dass drei der Summanden nur gerade Charakteristiken enthalten, während im vierten Term beide ungerade sind. Die zweite geht aus der ersten Gruppe hervor, indem man gleichzeitig beide Argumentenpaare um dieselben halben Perioden vermehrt; wir können uns daher auf die Betrachtung der letzteren Gruppe beschränken.

*) Dabei entsprechen sich in jedem Glied die oberen und unteren Zeichen.

Zur Abkürzung setzen wir

$$T_\nu = i_\nu \left\{ \vartheta(\delta_\nu)(v_0, w_0)\, \vartheta(\varepsilon_\nu)(v, w) \pm \vartheta(\varepsilon_\nu)(v_0, w_0)\, \vartheta(\delta_\nu)(v, w) \right\} \tag{4.}$$

unter i_ν natürlich eine Potenz von i verstanden. Dabei seien stets $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2), (\varepsilon_3), (\delta_1), (\delta_2), (\delta_3)$ als gerade vorausgesetzt, während $(\varepsilon_4), (\delta_4)$ ungerade sind; ferner sei $\Sigma(\varepsilon_\nu) = 0$; $\Sigma(\delta_\nu) = 0$.

Die Gleichung (3.) liefert nun eine erste Relation zwischen den Grössen T_ν, nämlich

$$\sum_1^4{}_\nu \, T_\nu^2 = 0. \tag{5.}$$

Eine andre lineare Relation zwischen den T_ν^2 kann offenbar nicht mehr stattfinden; denn indem man für v_0, w_0 geeignete halbe Perioden einsetzt, würde man daraus beispielsweise auch mehrere lineare Relationen zwischen vier einfachen Thetaquadraten erhalten, was nicht möglich ist.

In der folgenden Tabelle sind die Charakteristiken und die Vorzeichen für die einzelnen 15 Formeln zusammengestellt; die Bedeutung der Colonnen 13, 14 etc. wird erst späterhin zur Sprache kommen.

	(δ_1)	(δ_2)	(δ_3)	(δ_4)	(ε_1)	(ε_2)	(ε_3)	(ε_4)	i_1	i_2	i_3	i_4	i'_1	i'_2	i'_3	
1	$\binom{01}{00}$	$\binom{00}{00}$	$\binom{00}{01}$	$\binom{01}{01}$	$\binom{11}{00}$	$\binom{10}{00}$	$\binom{10}{01}$	$\binom{11}{01}$	1	$-i$	1	i	1	1	1	$d_1^2 > d_2^2 > d_3^2 > d_4^2 > 0$
2	$\binom{10}{00}$	$\binom{00}{00}$	$\binom{00}{10}$	$\binom{10}{10}$	$\binom{11}{00}$	$\binom{01}{00}$	$\binom{01}{10}$	$\binom{11}{10}$	1	$-i$	1	i	1	1	1	$d_1^2 > d_2^2 > d_3^2 > d_4^2 > 0$
3	$\binom{00}{11}$	$\binom{00}{00}$	$\binom{01}{00}$	$\binom{01}{11}$	$\binom{00}{01}$	$\binom{00}{10}$	$\binom{01}{10}$	$\binom{01}{01}$	1	i	1	i	1	1	1	$d_1^2 > d_2^2 > d_3^2 > d_4^2 > 0$
4	$\binom{00}{11}$	$\binom{00}{00}$	$\binom{10}{00}$	$\binom{10}{11}$	$\binom{00}{10}$	$\binom{00}{01}$	$\binom{10}{01}$	$\binom{10}{10}$	1	i	1	i	1	1	1	$d_1^2 > d_2^2 > d_3^2 > d_4^2 > 0$
5	$\binom{01}{00}$	$\binom{00}{00}$	$\binom{00}{11}$	$\binom{01}{11}$	$\binom{10}{00}$	$\binom{11}{00}$	$\binom{11}{11}$	$\binom{10}{11}$	1	$-i$	1	i	1	1	1	$d_1^2 > d_2^2 > d_3^2 > d_4^2 > 0$
6	$\binom{00}{10}$	$\binom{00}{00}$	$\binom{11}{00}$	$\binom{11}{10}$	$\binom{00}{01}$	$\binom{00}{11}$	$\binom{11}{11}$	$\binom{11}{01}$	1	$-i$	1	i	1	1	1	$d_1^2 > d_2^2 > d_3^2 > d_4^2 > 0$
7	$\binom{01}{10}$	$\binom{01}{00}$	$\binom{11}{00}$	$\binom{11}{10}$	$\binom{00}{11}$	$\binom{00}{01}$	$\binom{10}{01}$	$\binom{10}{11}$	1	i	1	i	i	i	i	$\delta_4 > 0 > \delta_3 > \delta_2 > \delta_1$
8	$\binom{10}{01}$	$\binom{10}{00}$	$\binom{11}{00}$	$\binom{11}{01}$	$\binom{00}{11}$	$\binom{00}{10}$	$\binom{01}{10}$	$\binom{01}{11}$	1	i	1	i	i	i	i	$\delta_4 > 0 > \delta_3 > \delta_2 > \delta_1$
9	$\binom{11}{11}$	$\binom{00}{11}$	$\binom{00}{01}$	$\binom{11}{01}$	$\binom{10}{00}$	$\binom{01}{00}$	$\binom{01}{10}$	$\binom{10}{10}$	1	i	1	i	i	i	i	$\delta_4 > 0 > \delta_3 > \delta_2 > \delta_1$
10	$\binom{11}{11}$	$\binom{00}{11}$	$\binom{00}{10}$	$\binom{11}{10}$	$\binom{01}{00}$	$\binom{10}{00}$	$\binom{10}{01}$	$\binom{01}{01}$	1	i	1	i	i	i	i	$\delta_4 > 0 > \delta_3 > \delta_2 > \delta_1$
11	$\binom{10}{01}$	$\binom{00}{01}$	$\binom{00}{10}$	$\binom{10}{10}$	$\binom{01}{00}$	$\binom{11}{00}$	$\binom{11}{11}$	$\binom{01}{11}$	1	$-i$	1	i	i	i	i	$\delta_4 > 0 > \delta_3 > \delta_2 > \delta_1$
12	$\binom{01}{10}$	$\binom{00}{10}$	$\binom{00}{01}$	$\binom{01}{01}$	$\binom{10}{00}$	$\binom{11}{00}$	$\binom{11}{11}$	$\binom{10}{11}$	1	$-i$	1	i	i	i	i	$\delta_4 > 0 > \delta_3 > \delta_2 > \delta_1$
13	$\binom{00}{00}$	$\binom{10}{00}$	$\binom{01}{10}$	$\binom{11}{10}$	$\binom{10}{01}$	$\binom{00}{01}$	$\binom{11}{11}$	$\binom{01}{11}$	1	$-i$	1	i	-1	-1	1	$d_3^2 > d_4^2 > 0 > d_1^2 > d_2^2$
14	$\binom{00}{00}$	$\binom{01}{00}$	$\binom{10}{01}$	$\binom{11}{01}$	$\binom{01}{10}$	$\binom{00}{10}$	$\binom{11}{11}$	$\binom{10}{11}$	1	$-i$	1	i	-1	-1	1	$d_3^2 > d_4^2 > 0 > d_1^2 > d_2^2$
15	$\binom{00}{00}$	$\binom{00}{11}$	$\binom{10}{01}$	$\binom{10}{10}$	$\binom{11}{11}$	$\binom{11}{00}$	$\binom{01}{10}$	$\binom{01}{01}$	1	i	1	i	-1	-1	1	$d_3^2 > d_4^2 > 0 > d_1^2 > d_2^2$

Wir schreiten nun zur Entwicklung einer wichtigen Klasse von Relationen, die zwischen den T_ν und ihren partiellen Ableitungen bestehen. Zur Abkürzung seien die Symbole eingeführt:

$$\begin{aligned} g\cdot\frac{\partial}{\partial v}+g'\cdot\frac{\partial}{\partial w}&=D\\ g\cdot\frac{\partial}{\partial v_0}+g'\cdot\frac{\partial}{\partial w_0}&=D_0, \end{aligned} \tag{6.}$$

wobei g und g' irgend welche willkürliche Grössen bedeuten. Aus der Definition der Funktion T_ν folgt dann ohne weiteres

$$\frac{1}{i_4\, i_\nu}\cdot\Big(T_4\, DT_\nu - T_\nu\, DT_4\Big)$$

$$\begin{aligned} &= \vartheta(\delta_4)(v_0,w_0)\cdot\vartheta(\delta_\nu)(v_0,w_0)\cdot\Big[\vartheta(\varepsilon_4)(v,w)\cdot D\vartheta(\varepsilon_\nu)(v,w) - \vartheta(\varepsilon_\nu)(v,w)\; D\vartheta(\varepsilon_4)(v,w)\Big]\\ &+ \vartheta(\varepsilon_4)(v_0,w_0)\;\vartheta(\varepsilon_\nu)(v_0,w_0)\cdot\Big[\vartheta(\delta_4)(v,w)\cdot D\vartheta(\delta_\nu)(v,w) - \vartheta(\delta_\nu)(v,w)\; D\vartheta(\delta_4)(v,w)\Big]\\ &\pm \vartheta(\delta_4)(v_0,w_0)\;\vartheta(\varepsilon_\nu)(v_0,w_0)\cdot\Big[\vartheta(\varepsilon_4)(v,w)\cdot D\vartheta(\delta_\nu)(v,w) - \vartheta(\delta_\nu)(v,w)\; D\vartheta(\varepsilon_4)(v,w)\Big]\\ &\pm \vartheta(\varepsilon_4)(v_0,w_0)\;\vartheta(\delta_\nu)(v_0,w_0)\cdot\Big[\vartheta(\delta_4)(v,w)\cdot D\vartheta(\varepsilon_\nu)(v,w) - \vartheta(\varepsilon_\nu)(v,w)\; D\vartheta(\delta_4)(v,w)\Big]. \end{aligned}$$

Die Summe der zwei ersten Glieder sei mit P, die der zwei letzten mit Q bezeichnet, so dass

$$\frac{1}{i_4\, i_\nu}\cdot\Big(T_4\, DT_\nu - T_\nu\, DT_4\Big) = P \pm Q$$

ist. Man erkennt leicht P und Q in Bezug auf die Variabeln v, w als Thetafunktionen zweiter Ordnung; P hat die Charakteristik $(\varepsilon_4)+(\varepsilon_\nu)=(\delta_4)+(\delta_\nu)$, Q: $(\varepsilon_4)+(\delta_\nu)=(\delta_4)+(\varepsilon_\nu)$. Demgemäss werden sich die Funktionen P und Q in folgender Weise darstellen lassen:

$$\begin{aligned} P = {} & A\;\vartheta(\delta_\nu)(v+v_0, w+w_0)\;\vartheta(\delta_4)(v-v_0, w-w_0) + B\vartheta(\delta_4)(v+v_0, w+w_0)\;\vartheta(\delta_\nu)(v-v_0, w-w_0)\\ &+ C\;\vartheta(\varepsilon_\nu)(v+v_0, w+w_0)\;\vartheta(\varepsilon_4)(v-v_0, w-w_0) + D\vartheta(\varepsilon_4)(v+v_0, w+w_0)\;\vartheta(\varepsilon_\nu)(v-v_0, w-w_0)\\ Q = {} & A'\vartheta(\delta_\nu)(v+v_0, w+w_0)\;\vartheta(\varepsilon_4)(v-v_0, w-w_0) + B'\vartheta(\varepsilon_4)(v+v_0, w+w_0)\;\vartheta(\delta_\nu)(v-v_0, w-w_0)\\ &+ C'\vartheta(\varepsilon_\nu)(v+v_0, w+w_0)\;\vartheta(\delta_4)(v-v_0, w-w_0) + D'\vartheta(\delta_4)(v+v_0, w+w_0)\;\vartheta(\varepsilon_\nu)(v-v_0, w-w_0), \end{aligned}$$

wobei die Grössen A, B, C, D; A', B', C', D' von v und w unabhängig sind.

Da die (δ_ν), (ε_ν) gerade; (δ_4), (ε_4) ungerade Charakteristiken sind, so folgt aus der Definition von P, dass dieses sich nicht ändert, wenn $-v$, $-w$ an Stelle von v, w tritt. Daraus folgt

$$B = -A;\quad D = -C.$$

Mit Rücksicht darauf findet man, wenn man für die Argumente v, w zuerst 0, 0; sodann die zur Charakteristik $(\varepsilon_4)+(\delta_4)$ gehörigen halben Perioden einsetzt, die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} &\vartheta(\delta_4)(v_0,w_0)\;\vartheta(\delta_\nu)(v_0,w_0)\;\vartheta(\varepsilon_\nu)\;D\vartheta(\varepsilon_4) + \vartheta(\varepsilon_4)(v_0,w_0)\;\vartheta(\varepsilon_\nu)(v_0,w_0)\;\vartheta(\delta_\nu)\;D\vartheta(\delta_4)\\ &= 2A\vartheta(\delta_\nu)(v_0,w_0)\;\vartheta(\delta_4)(v_0,w_0) + 2C\vartheta(\varepsilon_\nu)(v_0,w_0)\;\vartheta(\varepsilon_4)(v_0,w_0) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &\vartheta(\delta_4)(v_0,w_0)\;\vartheta(\delta_\nu)(v_0,w_0)\;\vartheta(\delta_\nu)\,D\vartheta(\delta_4) + i_\varkappa\,\vartheta(\varepsilon_4)(v_0,w_0)\;\vartheta(\varepsilon_\nu)(v_0,w_0)\;\vartheta(\varepsilon_\nu)\;D\vartheta(\varepsilon_4)\\ &= i_\varkappa\, 2A\vartheta(\varepsilon_\nu)(v_0,w_0)\;\vartheta(\varepsilon_4)(v_0,w_0) + 2C\vartheta(\delta_\nu)(v_0,w_0)\;\vartheta(\delta_4)(v_0,w_0), \end{aligned}$$

woraus folgt

$$A = \frac{1}{2}\,\vartheta(\varepsilon_\nu)\,D\,\vartheta(\varepsilon_4);\quad C = \frac{1}{2}\,\vartheta(\delta_\nu)\,D\,\vartheta(\delta_4).$$

Durch ganz analoge Betrachtungen bezüglich der Funktion Q findet man ebenso

$$B' = -A';\quad D' = -C'$$

$$A' = \frac{1}{2}\,\vartheta(\varepsilon_\nu)\,D\,\vartheta(\delta_4);\quad C' = \vartheta(\delta_\nu)\,D\,\vartheta(\varepsilon_4).$$

Indem man diese Resultate in P und Q einsetzt, findet man leicht

$$\frac{2}{i_4 i_\nu}(T_4\,DT_\nu - T_\nu\,DT_4)$$

$$\begin{aligned}
&= \big[\vartheta(\varepsilon_\nu)\,\vartheta(\delta_\nu)\,(v+v_0,\ w+w_0) \pm \vartheta(\delta_\nu)\,\vartheta(\varepsilon_\nu)\,(v+v_0,\ w+w_0)\big]\\
&\times \big[D\,\vartheta(\varepsilon_4)\,\vartheta(\delta_4)\,(v-v_0,\ w-w_0) \pm D\,\vartheta(\delta_4)\,\vartheta(\varepsilon_4)\,(v-v_0,\ w-w_0)\big]\\
&- \big[\vartheta(\varepsilon_\nu)\,\vartheta(\delta_\nu)\,(v-v_0,\ w-w_0) \pm \vartheta(\delta_\nu)\,\vartheta(\varepsilon_\nu)\,(v-v_0,\ w-w_0)\big]\\
&\times \big[D\,\vartheta(\varepsilon_4)\,\vartheta(\delta_4)\,(v+v_0,\ w+w_0) \pm D\,\vartheta(\delta_4)\,\vartheta(\varepsilon_4)\,(v+v_0,\ w+w_0)\big].
\end{aligned} \tag{7.}$$

In dieser Formel bedeutet ν eine beliebige der Zahlen 1, 2, 3; mit $\varkappa$ und λ seien die beiden andern bezeichnet. Wir vermehren dann in (7.) gleichzeitig beide Argumentenpaare um die zur Charakteristik $(\varepsilon_4)+(\varepsilon_\varkappa)=(\varepsilon_\nu)+(\varepsilon_\lambda)$ gehörigen halben Perioden; dadurch wird die linke Seite der Gleichung, abgesehen von einem Exponentialfaktor, gleich

$$T_\varkappa\,DT_\lambda - T_\lambda\,DT_\varkappa.$$

Auf der rechten Seite ändern sich die Charakteristiken gar nicht, und die zweite und dritte Klammer bleiben ebenfalls ungeändert; die Glieder der ersten und vierten Klammer dagegen bekommen denselben Exponentialfaktor wie die linke Seite und wechseln eventuell ihr Zeichen. Der Ausdruck $T_\varkappa\,DT_\lambda - T_\lambda\,DT_\varkappa$ verschwindet aber identisch für $v=w=0$, weil $(\varepsilon_\varkappa)$, (ε_λ), $(\delta_\varkappa)$, (δ_λ) gerade Charakteristiken sind, und aus dieser Bedingung ergeben sich leicht die zweifelhaften Vorzeichen. Man findet so

$$(-1)^{\varepsilon}\cdot\frac{2}{i_4 i_\nu}(T_\varkappa\,DT_\lambda - T_\lambda\,DT_\varkappa)$$

$$\begin{aligned}
&= \big[\vartheta(\varepsilon_\nu)\,\vartheta(\delta_\nu)\,(v+v_0,\ w+w_0) \pm \vartheta(\delta_\nu)\,\vartheta(\varepsilon_\nu)\,(v+v_0,\ w+w_0)\big]\\
&\times \big[D\,\vartheta(\varepsilon_4)\,\vartheta(\delta_4)\,(v-v_0,\ w-w_0) \pm D\,\vartheta(\delta_4)\,\vartheta(\varepsilon_4)\,(v-v_0,\ w-w_0)\big]\\
&+ \big[\vartheta(\varepsilon_\nu)\,\vartheta(\delta_\nu)\,(v-v_0,\ w-w_0) \pm \vartheta(\delta_\nu)\,\vartheta(\varepsilon_\nu)\,(v-v_0,\ w-w_0)\big]\\
&\times \big[D\,\vartheta(\varepsilon_4)\,\vartheta(\delta_4)\,(v+v_0,\ w+w_0) \pm D\,\vartheta(\delta_4)\,\vartheta(\varepsilon_4)\,(v+v_0,\ w+w_0)\big].
\end{aligned} \tag{8.}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung geht aus der rechten Seite von (7.) offenbar dadurch hervor, dass man v, w mit v_0, w_0 vertauscht und dem ganzen Ausdruck das negative Zeichen gibt. Nach der in (6.) eingeführten Abkürzung hat sie also den Wert

$$-\frac{2}{i_4 i_\nu}(T_4\,D_0T_\nu - T_\nu\,D_0T_4).$$

Aus dieser Überlegung entspringen nun die drei Formeln

$$\begin{aligned} T_2 D T_3 - T_3 D T_2 &= (-1)^{\varepsilon_1}(T_4 D_0 T_1 - T_1 D_0 T_4) \\ T_3 D T_1 - T_1 D T_3 &= (-1)^{\varepsilon_2}(T_4 D_0 T_2 - T_2 D_0 T_4) \\ T_1 D T_2 - T_2 D T_1 &= (-1)^{\varepsilon_3}(T_4 D_0 T_3 - T_3 D_0 T_4). \end{aligned} \tag{9.}$$

Die Vorzeichen sind leicht zu bestimmen. Multipliciert man nämlich die Gleichungen der Reihe nach mit T_1, T_2, T_3 und addiert sie, so ergibt sich

$$T_4 \cdot \left[(-1)^{\varepsilon_1} T_1 D_0 T_1 + (-1)^{\varepsilon_2} T_2 D_0 T_2 + (-1)^{\varepsilon_3} T_3 D_0 T_3\right] - D_0 T_4 \cdot \left[(-1)^{\varepsilon_1} T_1^2 + (-1)^{\varepsilon_2} T_2^2 + (-1)^{\varepsilon_3} T_3^2\right] = 0$$

oder

$$T_4 \cdot D_0 \left[(-1)^{\varepsilon_1} T_1^2 + (-1)^{\varepsilon_2} T_2^2 + (-1)^{\varepsilon_3} T_3^2\right] - 2 D_0 T_4 \cdot \left[(-1)^{\varepsilon_1} T_1^2 + (-1)^{\varepsilon_2} T_2^2 + (-1)^{\varepsilon_3} T_3^2\right] = 0;$$

ebenso, indem man v, w mit v_0, w_0 vertauscht

$$T_4 \cdot D \left[(-1)^{\varepsilon_1} T_1^2 + (-1)^{\varepsilon_2} T_2^2 + (-1)^{\varepsilon_3} T_3^2\right] - 2 D T_4 \cdot \left[(-1)^{\varepsilon_1} T_1^2 + (-1)^{\varepsilon_2} T_2^2 + (-1)^{\varepsilon_3} T_3^2\right] = 0.$$

Durch Integration folgt hieraus

$$(-1)^{\varepsilon_1} T_1^2 + (-1)^{\varepsilon_2} T_2^2 + (-1)^{\varepsilon_3} T_3^2 = c\, T_4^2,$$

wo c von v, w, v_0, w_0 unabhängig ist. Allein die T_ν^2 erfüllen nur die eine lineare Relation (5.), woraus sich ergibt, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$. Die drei Vorzeichen in den Gleichungen (9.) sind daher einander gleich. Ob jedoch das positive oder negative Zeichen zu setzen ist, hängt natürlich davon ab, wie man die Vorzeichen der T_ν bestimmt hat. In der Tabelle Seite 10 sind die i_1, i_2, i_3, i_4 so angegeben, dass stets das positive Zeichen gilt. Aus (9.) ergibt sich hienach das wichtige Formelsystem

$$\begin{aligned} T_2 D T_3 - T_3 D T_2 &= T_4 D_0 T_1 - T_1 D_0 T_4 \\ T_3 D T_1 - T_1 D T_3 &= T_4 D_0 T_2 - T_2 D_0 T_4 \\ T_1 D T_2 - T_2 D T_1 &= T_4 D_0 T_3 - T_3 D_0 T_4; \end{aligned} \tag{10.}$$

ebenso, indem man v, w mit v_0, w_0 vertauscht

$$\begin{aligned} T_2 D_0 T_3 - T_3 D_0 T_2 &= T_4 D T_1 - T_1 D T_4 \\ T_3 D_0 T_1 - T_1 D_0 T_3 &= T_4 D T_2 - T_2 D T_4 \\ T_1 D_0 T_2 - T_2 D_0 T_1 &= T_4 D T_3 - T_3 D T_4. \end{aligned} \tag{11.}$$

Von den mannichfachen Beziehungen, die sich hieraus weiter ableiten lassen, seien einige hervorgehoben. Multipliciert man die Gleichungen (10.) der Reihe nach mit $D_0 T_1$, $D_0 T_2$, $D_0 T_3$, und beachtet, dass durch Differentiation von (5.)

$$\sum_1^4{}^\nu T_\nu D T_\nu = 0; \quad \sum_1^4{}^\nu T_\nu D_0 T_\nu = 0$$

folgt, so erhält man durch Addition

$$T_4 \sum_1^4{}^\nu (D_0 T_\nu)^2 = \begin{vmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \\ D T_1 & D T_2 & D T_3 \\ D_0 T_1 & D_0 T_2 & D_0 T_3 \end{vmatrix}. \tag{12.}$$

Genau ebenso findet man

$$T_4 \sum_1^4{}^{\nu} (DT_\nu)^2 = \begin{vmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \\ D_0 T_1 & D_0 T_2 & D_0 T_3 \\ DT_1 & DT_2 & DT_3 \end{vmatrix}. \qquad (13.)$$

Die Addition von (12.) und (13.) ergibt schliesslich

$$\sum_1^4{}^{\nu} (DT_\nu)^2 + \sum_1^4{}^{\nu} (D_0 T_\nu)^2 = 0. \qquad (14.)$$

Multipliciert man ferner die Gleichungen (10.) mit DT_1, DT_2, DT_3 und addiert sie, so entsteht die weitere Relation

$$\sum_1^4{}^{\nu} DT_\nu D_0 T_\nu = 0. \qquad (15.)$$

§ 3.

Umformung der bekannten Integrale durch Einführung neuer Veränderlicher.

Nachdem wir nun die nötigen Thetaformeln entwickelt haben, können wir unser Rotationsproblem in Angriff nehmen. Nach § 1 handelt es sich um die Integration des nachstehenden Systems von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} A_1 \frac{dp_1}{dt} &= (A_2 - A_3)(p_2 p_3 + k^2 \gamma_2 \gamma_3) \\ A_2 \frac{dp_2}{dt} &= (A_3 - A_1)(p_3 p_1 + k^2 \gamma_3 \gamma_1) \\ A_3 \frac{dp_3}{dt} &= (A_1 - A_2)(p_1 p_2 + k^2 \gamma_1 \gamma_2) \end{aligned} \qquad (1.)$$

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_2 p_3 - \gamma_3 p_2; \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = \gamma_3 p_1 - \gamma_1 p_3; \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1 p_2 - \gamma_2 p_1. \qquad (2.)$$

Das System der von W. Voigt a. a. O. abgeleiteten Integrale lässt sich leicht in die Form setzen

$$\begin{aligned} \gamma_1^2 + \frac{1}{k^2} \frac{A_2}{A_3 - A_1} p_2^2 - \frac{1}{k^2} \frac{A_3}{A_1 - A_2} p_3^2 &= m_1 \\ \gamma_2^2 + \frac{1}{k^2} \frac{A_3}{A_1 - A_2} p_3^2 - \frac{1}{k^2} \frac{A_1}{A_2 - A_3} p_1^2 &= m_2 \\ \gamma_3^2 + \frac{1}{k^2} \frac{A_1}{A_2 - A_3} p_1^2 - \frac{1}{k^2} \frac{A_2}{A_1 - A_1} p_2^2 &= m_3 \\ A_1 p_1 \gamma_1 + A_2 p_2 \gamma_2 + A_3 p_3 \gamma_3 &= n \end{aligned} \qquad (3.)$$

unter m_1, m_2, m_3, n Integrationsconstante verstanden, die an die Bedingung gebunden sind

$$m_1 + m_2 + m_3 = 1. \qquad (4.)$$

Um die von Herrn Kötter angegebene Methode auf unser Problem anwenden zu können, multiplicieren wir die Integralgleichungen der Reihe nach mit den zunächst unbestimmten Coefficienten

M_1, M_2, M_3, $2N$, und suchen diese dann so zu bestimmen, dass nach Addition der vier Gleichungen die linke Seite die Form $\Sigma(a_\nu\,\gamma_\nu + b_\nu p_\nu)^2$ annimmt, unter a_ν, b_ν Constante verstanden. Für die Coefficienten findet man so die drei Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} M_1(M_3 - M_2) &= k^2 A_1 (A_2 - A_3) N^2 \\ M_2(M_1 - M_3) &= k^2 A_2 (A_3 - A_1) N^2 \\ M_3(M_2 - M_1) &= k^2 A_3 (A_1 - A_2) N^2, \end{aligned}$$

deren dritte eine Folge der beiden ersten ist. Darnach kann man

$$\frac{M_1 M_2 M_3}{M_\nu} = N^2 \cdot \left(s - k^2 \frac{A_1 A_2 A_3}{A_\nu}\right)$$

setzen, wo unter s eine ganz willkürliche Grösse zu verstehen ist.

Führt man nun die Abkürzung ein

$$k^2 \frac{A_1 A_2 A_3}{A_\nu} = c_\nu, \tag{5.}$$

so folgt hieraus

$$\frac{M_\nu^2}{N^2} = \frac{(s - c_1)(s - c_2)(s - c_3)}{(s - c_\nu)^2}$$

oder, indem man einen Proportionalitätsfaktor unterdrückt,

$$\begin{aligned} M_\nu &= \frac{(s - c_1)(s - c_2)(s - c_3)}{s - c_\nu} \\ N &= \sqrt{(s - c_1)(s - c_2)(s - c_3)}. \end{aligned}$$

Man erhält so die folgende für jeden Werth von s geltende Gleichung:

$$\begin{aligned} &\sum_1^3{}^\nu \left\{ \gamma_\nu \frac{\sqrt{(s - c_1)(s - c_2)(s - c_3)}}{\sqrt{s - c_\nu}} + A_\nu p_\nu \sqrt{s - c_\nu} \right\}^2 \\ &= \sum_1^3{}^\nu m_\nu \frac{(s - c_1)(s - c_2)(s - c_3)}{s - c_\nu} + 2n \cdot \sqrt{(s - c_1)(s - c_2)(s - c_3)}, \end{aligned} \tag{6.}$$

welche das System (3.) vollkommen ersetzt.

Die rechte Seite verschwindet für vier Werte von s, die wir als von einander verschieden voraussetzen wollen, und mit s_1, s_2, s_3, s_4 bezeichnen.

Bezeichnet man die ganze rationale Funktion

$$-\frac{1}{2n} \sum_1^3{}^\nu m_\nu \frac{(s - c_1)(s - c_2)(s - c_3)}{s - c_\nu}$$

der Kürze halber mit S, und die Werte, welche sie für $s = s_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ annimmt, mit S_i, so ist

$$S_i = -\frac{1}{2n} \sum_1^3{}^\nu m_\nu \frac{(s_i - c_1)(s_i - c_2)(s_i - c_3)}{s_i - c_\nu} = \sqrt{(s_i - c_1)(s_i - c_2)(s_i - c_3)}$$

und aus (6.) gehen die vier Gleichungen hervor

$$\sum_1^3{}_\nu \left\{ \gamma_\nu \frac{S_i}{\sqrt{s_i - c_\nu}} + A_\nu\, p_\nu \sqrt{s_i - c_\nu} \right\}^2 = 0;\ (i = 1, 2, 3, 4) \tag{7.}$$

Da diese in den γ_ν, p_ν homogen sind, so können sie den vier Gleichungen 3. nicht äquivalent sein, sind also auch nicht von einander unabhängig. Analytisch erkennt man dies daraus, dass, wenn

$$(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4) = \psi(s) \tag{8.}$$

gesetzt wird, die Gleichung

$$\sum_1^4{}_i \frac{1}{\psi'(s_i)} \left\{ \gamma_\nu \frac{S_i}{\sqrt{s_i - c_\nu}} + A_\nu\, p_\nu \sqrt{s_i - c_\nu} \right\}^2 = 0 \tag{9.}$$

für jedes Wertepaar von γ_ν, p_ν identisch befriedigt wird.

An Stelle von γ_ν, p_ν führen wir nun neue Variable ein durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\xi_\nu &= \gamma_\nu \left\{ \frac{S_1}{\sqrt{s_1 - c_\nu}\ \sqrt{\psi'(s_1)}} + i \frac{S_2}{\sqrt{s_2 - c_\nu}\ \sqrt{\psi'(s_2)}} \right\} + A_\nu\, p_\nu \left\{ \frac{\sqrt{s_1 - c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_1)}} + i \frac{\sqrt{s_2 - c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_2)}} \right\} \\
\eta_\nu &= \gamma_\nu \left\{ \frac{S_1}{\sqrt{s_1 - c_\nu}\ \sqrt{\psi'(s_1)}} - i \frac{S_2}{\sqrt{s_2 - c_\nu}\ \sqrt{\psi'(s_2)}} \right\} + A_\nu\, p_\nu \left\{ \frac{\sqrt{s_1 - c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_1)}} - i \frac{\sqrt{s_2 - c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_2)}} \right\};
\end{aligned} \tag{10.}$$

ausserdem sei

$$\begin{aligned}
\xi'_\nu &= \gamma_\nu \left\{ \frac{S_3}{\sqrt{s_3 - c_\nu}\ \sqrt{\psi'(s_3)}} + i \frac{S_4}{\sqrt{s_4 - c_\nu}\ \sqrt{\psi'(s_4)}} \right\} + A_\nu\, p_\nu \left\{ \frac{\sqrt{s_3 - c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_3)}} + i \frac{\sqrt{s_4 - c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_4)}} \right\} \\
\eta'_\nu &= \gamma_\nu \left\{ \frac{S_3}{\sqrt{s_3 - c_\nu}\ \sqrt{\psi'(s_3)}} - i \frac{S_4}{\sqrt{s_4 - c_\nu}\ \sqrt{\psi'(s_4)}} \right\} + A_\nu\, p_\nu \left\{ \frac{\sqrt{s_3 - c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_3)}} - i \frac{\sqrt{s_4 - c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_4)}} \right\}.
\end{aligned}$$

Aus der Gleichung (7.) folgt dann ohne weiteres

$$\sum_1^3{}_\nu (\xi_\nu \pm \eta_\nu)^2 = 0;\ \sum_1^3{}_\nu (\xi'_\nu \pm \eta'_\nu)^2 = 0. \tag{11.}$$

Ferner ergibt sich aus (9.) die Identität

$$\xi_\nu\, \eta_\nu + \xi'_\nu\, \eta'_\nu = 0$$

und da ξ_ν, η_ν, ξ'_ν, η'_ν lineare ganze Funktionen der zwei Variabeln γ_ν, p_ν sind, so ist hieraus zu schliessen, dass ξ'_ν und η'_ν je einer der Variabeln ξ_ν und η_ν bis auf einen von γ_ν, p_ν freien Faktor gleich sein müssen. Wir können nun die Vorzeichen der Wurzelgrössen derart wählen, dass ξ_ν und ξ'_ν, ebenso η_ν und η'_ν einander entsprechen; dazu ist nur erforderlich, dass

$$\frac{\dfrac{S_1}{\sqrt{s_1-c_\nu}\ \sqrt{\psi'(s_1)}}+i\,\dfrac{S_2}{\sqrt{s_2-c_\nu}\ \sqrt{\psi'(s_2)}}}{\dfrac{S_3}{\sqrt{s_3-c_\nu}\ \sqrt{\psi'(s_3)}}+i\,\dfrac{S_4}{\sqrt{s_4-c_\nu}\ \sqrt{\psi'(s_4)}}}=\frac{\dfrac{\sqrt{s_1-c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_1)}}+i\,\dfrac{\sqrt{s_2-c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_2)}}}{\dfrac{\sqrt{s_3-c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_3)}}+i\,\dfrac{\sqrt{s_4-c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_4)}}}$$

sei. Da aber wegen der Identität

$$\sum_1^4{}_i\,\frac{s_i-c_\nu}{\psi'(s_i)}=0$$

die rechte Seite durch

$$-\frac{\dfrac{\sqrt{s_3-c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_3)}}-i\,\dfrac{\sqrt{s_4-c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_4)}}}{\dfrac{\sqrt{s_1-c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_1)}}-i\,\dfrac{\sqrt{s_2-c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_2)}}}$$

ersetzt werden darf, so erhält man nach Beseitigung der Nenner

$$\left\{\frac{S_1}{\sqrt{s_1-c_\nu}\ \sqrt{\psi'(s_1)}}+i\,\frac{S_2}{\sqrt{s_2-c_\nu}\ \sqrt{\psi'(s_2)}}\right\}\cdot\left\{\frac{\sqrt{s_1-c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_1)}}-i\,\frac{\sqrt{s_2-c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_2)}}\right\}$$
$$+\left\{\frac{S_3}{\sqrt{s_3-c_\nu}\ \sqrt{\psi'(s_3)}}+i\,\frac{S_4}{\sqrt{s_4-c_\nu}\ \sqrt{\psi'(s_4)}}\right\}\cdot\left\{\frac{\sqrt{s_3-c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_3)}}-i\,\frac{\sqrt{s_4-c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_4)}}\right\}=0.$$

Hieraus folgt, weil

$$\sum_1^4{}_i\,\frac{S_i}{\psi'(s_i)}=0$$

ist, einfach durch Ausmultiplicieren

$$\frac{S_2(s_1-c_\nu)-S_1(s_2-c_\nu)}{\sqrt{s_1-c_\nu}\ \sqrt{s_2-c_\nu}\ \sqrt{\psi'(s_1)}\ \sqrt{\psi'(s_2)}}+\frac{S_4(s_3-c_\nu)-S_3(s_4-c_\nu)}{\sqrt{s_3-c_\nu}\ \sqrt{s_4-c_\nu}\ \sqrt{\psi'(s_3)}\ \sqrt{\psi'(s_4)}}=0. \quad (12.)$$

Indem man jetzt die Werte der S_i in ihrer rationalen Form einsetzt, und sich noch der Abkürzung

$$(x-c_1)\ (x-c_2)\ (x-c_3)=\varphi(x) \quad (13.)$$

bedient, ergibt sich nach leichter Reduktion

$$\frac{s_2-s_1}{\sqrt{\psi'(s_2)}\ \sqrt{\psi'(s_1)}}\ \frac{(s_1-c_\nu)\ (s_2-c_\nu)-m_\nu\,\varphi'(c_\nu)}{\sqrt{s_1-c_\nu}\ \sqrt{s_2-c_\nu}}$$

$$+\frac{s_4-s_3}{\sqrt{\psi'(s_4)}\ \sqrt{\psi'(s_3)}}\ \frac{(s_3-c_\nu)\ (s_4-c_\nu)-m_\nu\,\varphi'(c_\nu)}{\sqrt{s_3-c_\nu}\ \sqrt{s_4-c_\nu}}=0. \quad (14.)$$

Nun ist aber

$$\left[S^2 - (s - c_1)\ (s - c_2)\ (s - c_3)\right]\ 4n^2 = (s - s_1)\ (s - s_2)\ (s - s_3)\ (s - s_4) = \psi(s),$$

woraus für $s = c_\nu$ folgt

$$\left(m_\nu\ \varphi'(c_\nu)\right)^2 = \psi(c_\nu),$$

also

$$m_\nu\ \varphi'(c_\nu) = (-1)^{\varepsilon_\nu}\ \sqrt{s_1 - c_\nu}\ \sqrt{s_2 - c_\nu}\ \sqrt{s_3 - c_\nu}\ \sqrt{s_4 - c_\nu}. \tag{15.}$$

Des weitern hat man

$$\frac{s_2 - s_1}{\sqrt{\psi'(s_2)}\ \sqrt{\psi'(s_1)}} = (-1)^{\varepsilon}\ \frac{s_4 - s_3}{\sqrt{\psi'(s_4)}\ \sqrt{\psi'(s_3)}}, \tag{16.}$$

sodass Gleichung (14.) übergeht in

$$\begin{aligned}&\sqrt{s_1 - c_\nu}\ \sqrt{s_2 - c_\nu} - (-1)^{\varepsilon_\nu}\ \sqrt{s_3 - c_\nu}\ \sqrt{s_4 - c_\nu}\\ &+ (-1)^{\varepsilon}\ \sqrt{s_3 - c_\nu}\ \sqrt{s_4 - c_\nu} - (-1)^{\varepsilon + \varepsilon_\nu}\ \sqrt{s_1 - c_\nu}\ \sqrt{s_2 - c_\nu} = 0,\end{aligned}$$

woraus sich ergibt

$$\varepsilon_\nu = \varepsilon.$$

Eliminiert man demnach die Grösse $(-1)^{\varepsilon}$ aus (15.) und (16.), so nimmt die Gleichung zur Bestimmung der Vorzeichen die Form an

$$\frac{\sqrt{s_1 - c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_1)}}\ \frac{\sqrt{s_2 - c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_2)}}\ \frac{\sqrt{s_3 - c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_3)}}\ \frac{\sqrt{s_4 - c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_4)}} = m_\nu\ \varphi'(c_\nu)\ \frac{s_2 - s_1}{s_4 - s_3}\ \frac{1}{\psi'(s_1)\ \psi'(s_2)}. \tag{17.}$$

Es ist vielleicht nicht überflüssig, hervorzuheben, dass wir unter dem Symbol S_i lediglich den rationalen Ausdruck

$$-\frac{1}{2n} \sum_1^3{}_\nu\ m_\nu\ \frac{(s_i - c_1)\ (s_i - c_2)\ (s_i - c_3)}{s_i - c_\nu}$$

verstehen, welcher mit $\sqrt{s_i - c_1}\ \sqrt{s_i - c_2}\ \sqrt{s_i - c_3}$ durchaus nicht gleichbezeichnet zu sein braucht.

Der Gleichung (12.) stellen sich bei der vorausgesetzten Wahl der Vorzeichen noch die beiden analogen zur Seite

$$\frac{S_1(s_3 - c_\nu) - S_3(s_1 - c_\nu)}{\sqrt{s_1 - c_\nu}\ \sqrt{s_3 - c_\nu}\ \sqrt{\psi'(s_1)}\ \sqrt{\psi'(s_3)}} + \frac{S_4(s_2 - c_\nu) - S_2(s_4 - c_\nu)}{\sqrt{s_4 - c_\nu}\ \sqrt{s_2 - c_\nu}\ \sqrt{\psi'(s_4)}\ \sqrt{\psi'(s_2)}} = 0 \tag{18.}$$

$$\frac{S_1(s_4 - c_\nu) - S_4(s_1 - c_\nu)}{\sqrt{s_1 - c_\nu}\ \sqrt{s_4 - c_\nu}\ \sqrt{\psi'(s_1)}\ \sqrt{\psi'(s_4)}} + \frac{S_2(s_3 - c_\nu) - S_3(s_2 - c_\nu)}{\sqrt{s_2 - c_\nu}\ \sqrt{s_3 - c_\nu}\ \sqrt{\psi'(s_2)}\ \sqrt{\psi'(s_3)}} = 0. \tag{19.}$$

Nach diesen Festsetzungen wollen wir abkürzungshalber die folgenden Constanten einführen

$$\left.\begin{aligned} d_\nu &= \frac{\frac{\sqrt{s_3-c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_3)}} + i\frac{\sqrt{s_4-c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_4)}}}{\frac{\sqrt{s_1-c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_1)}} + i\frac{\sqrt{s_2-c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_2)}}} = \frac{\frac{S_3}{\sqrt{s_3-c_\nu}\ \sqrt{\psi'(s_3)}} + i\frac{S_4}{\sqrt{s_4-c_\nu}\ \sqrt{\psi'(s_4)}}}{\frac{S_1}{\sqrt{s_1-c_\nu}\ \sqrt{\psi'(s_1)}} + i\frac{S_2}{\sqrt{s_2-c_\nu}\ \sqrt{\psi'(s_2)}}} \\ -d_\nu^{-1} &= \frac{\frac{\sqrt{s_3-c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_3)}} - i\frac{\sqrt{s_4-c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_4)}}}{\frac{\sqrt{s_1-c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_1)}} - i\frac{\sqrt{s_2-c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_2)}}} = \frac{\frac{S_3}{\sqrt{s_3-c_\nu}\ \sqrt{\psi'(s_3)}} - i\frac{S_4}{\sqrt{s_4-c_\nu}\ \sqrt{\psi'(s_4)}}}{\frac{S_1}{\sqrt{s_1-c_\nu}\ \sqrt{\psi'(s_1)}} - i\frac{S_2}{\sqrt{s_2-c_\nu}\ \sqrt{\psi'(s_2)}}} \end{aligned}\right\} \quad (20.)$$

mithin

Es ist dann offenbar

$$\xi_\nu' = d_\nu\,\xi_\nu\,;\ \eta_\nu' = -\,d_\nu^{-1}\,\eta_\nu\,.$$

Aus den Gleichungen (11.) ergibt sich daher

$$\left.\begin{aligned} &\sum_1^3{}^\nu\,\xi_\nu^2 + \sum_1^3{}^\nu\,\eta_\nu^2 = 0 \\ &\sum_1^3{}^\nu\,d_\nu^2\,\xi_\nu^2 + \sum_1^3{}^\nu\,d_\nu^{-2}\,\eta_\nu^2 = 0 \\ &\sum_1^3{}^\nu\,\xi_\nu\,\eta_\nu = 0. \end{aligned}\right\} \quad (21.)$$

Dieses System repräsentiert drei Integrale unserer Differentialgleichungen, und indem wir nunmehr den Weg des Herrn Kötter verlassen, wenden wir uns der Aufgabe zu, auch das vierte bekannte Integral mittels der Variabeln ξ_ν, η_ν in eine einfache Gestalt zu bringen.

Zu diesem Zweck führen wir zunächst die Abkürzungen ein

$$\left.\begin{aligned} \xi_\nu^0 &= \frac{1}{\sqrt{\varphi'(c_\nu)}}\left\{\frac{\sqrt{s_1-c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_1)}} + i\frac{\sqrt{s_2-c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_2)}}\right\} \\ \eta_\nu^0 &= \frac{1}{\sqrt{\varphi'(c_\nu)}}\left\{\frac{\sqrt{s_1-c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_1)}} - i\frac{\sqrt{s_2-c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_2)}}\right\};\ (\nu = 1,2,3). \end{aligned}\right\} \quad (22.)$$

Daraus erhellt unmittelbar

$$\sum_1^3{}^\nu\,(\xi_\nu^0 \pm \eta_\nu^0)^2 = 0\,;\ \sum_1^3{}^\nu\,(d_\nu\,\xi_\nu^0 \pm d_\nu^{-1}\,\eta_\nu^0)^2 = 0. \quad (23.)$$

Es ist somit ξ_ν^0, η_ν^0 ein spezielles constantes Wertsystem, welches die Gleichungen (21.) befriedigt.

Indem man nun aus den Gleichungen (10.) die Variable p_ν eliminiert, findet man

$$\eta_\nu^0\,\xi_\nu - \xi_\nu^0\,\eta_\nu = \frac{1}{\sqrt{\varphi'(c_\nu)}}\,D_\nu\,\gamma_\nu\,, \quad (24.)$$

wobei D_ν die Bedeutung hat

$$\begin{aligned} D_\nu = &\left\{ \frac{S_1}{\sqrt{s_1 - c_\nu}\,\sqrt{\psi'(s_1)}} + i\,\frac{S_2}{\sqrt{s_2 - c_\nu}\,\sqrt{\psi'(s_2)}} \right\} \cdot \left\{ \frac{\sqrt{s_1 - c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_1)}} - i\,\frac{\sqrt{s_2 - c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_2)}} \right\} \\ &- \left\{ \frac{S_1}{\sqrt{s_1 - c_\nu}\,\sqrt{\psi'(s_1)}} - i\,\frac{S_2}{\sqrt{s_2 - c_\nu}\,\sqrt{\psi'(s_2)}} \right\} \cdot \left\{ \frac{\sqrt{s_1 - c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_1)}} + i\,\frac{\sqrt{s_2 - c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_2)}} \right\} \end{aligned} \tag{25.}$$

mithin ist auch

$$\begin{aligned} d_\nu D_\nu = &\left\{ \frac{S_3}{\sqrt{s_3 - c_\nu}\,\sqrt{\psi'(s_3)}} + i\,\frac{S_4}{\sqrt{s_4 - c_\nu}\,\sqrt{\psi'(s_4)}} \right\} \cdot \left\{ \frac{\sqrt{s_1 - c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_1)}} - i\,\frac{\sqrt{s_2 - c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_2)}} \right\} \\ &- \left\{ \frac{S_1}{\sqrt{s_1 - c_\nu}\,\sqrt{\psi'(s_1)}} - i\,\frac{S_2}{\sqrt{s_2 - c_\nu}\,\sqrt{\psi'(s_2)}} \right\} \cdot \left\{ \frac{\sqrt{s_3 - c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_3)}} + i\,\frac{\sqrt{s_4 - c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_4)}} \right\} \end{aligned} \tag{26.}$$

$$\begin{aligned} d_\nu^{-1} D_\nu = &- \left\{ \frac{S_1}{\sqrt{s_1 - c_\nu}\,\sqrt{\psi'(s_1)}} + i\,\frac{S_2}{\sqrt{s_2 - c_\nu}\,\sqrt{\psi'(s_2)}} \right\} \cdot \left\{ \frac{\sqrt{s_3 - c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_3)}} - i\,\frac{\sqrt{s_4 - c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_4)}} \right\} \\ &+ \left\{ \frac{S_3}{\sqrt{s_3 - c_\nu}\,\sqrt{\psi'(s_3)}} - i\,\frac{S_4}{\sqrt{s_4 - c_\nu}\,\sqrt{\psi'(s_4)}} \right\} \cdot \left\{ \frac{\sqrt{s_1 - c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_1)}} + i\,\frac{\sqrt{s_2 - c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_2)}} \right\} \end{aligned} \tag{27.}$$

Aus (25.) folgt ohne weiteres

$$D_\nu = 2i\,\frac{S_2(s_1 - c_\nu) - S_1(s_2 - c_\nu)}{\sqrt{s_1 - c_\nu}\,\sqrt{s_2 - c_\nu}\,\sqrt{\psi'(s_1)}\,\sqrt{\psi'(s_2)}}. \tag{28.}$$

Ferner erhält man durch Addition und Subtraktion der Gleichungen (26.) und (27.)

$$\begin{aligned} D_\nu(d_\nu + d_\nu^{-1}) &= 2\,\frac{S_3(s_1 - c_\nu) - S_1(s_3 - c_\nu)}{\sqrt{s_1 - c_\nu}\,\sqrt{s_3 - c_\nu}\,\sqrt{\psi'(s_1)}\,\sqrt{\psi'(s_3)}} + 2\,\frac{S_4(s_2 - c_\nu) - S_2(s_4 - c_\nu)}{\sqrt{s_2 - c_\nu}\,\sqrt{s_4 - c_\nu}\,\sqrt{\psi'(s_2)}\,\sqrt{\psi'(s_4)}} \\ &= 4\,\frac{S_3(s_1 - c_\nu) - S_1(s_3 - c_\nu)}{\sqrt{s_1 - c_\nu}\,\sqrt{s_3 - c_\nu}\,\sqrt{\psi'(s_1)}\,\sqrt{\psi'(s_3)}} \quad \text{(mit Rücksicht auf (18.))}, \end{aligned} \tag{29.}$$

$$\begin{aligned} D_\nu(d_\nu - d_\nu^{-1}) &= 2i\,\frac{S_4(s_1 - c_\nu) - S_1(s_4 - c_\nu)}{\sqrt{s_1 - c_\nu}\,\sqrt{s_4 - c_\nu}\,\sqrt{\psi'(s_1)}\,\sqrt{\psi'(s_4)}} - 2i\,\frac{S_3(s_2 - c_\nu) - S_2(s_3 - c_\nu)}{\sqrt{s_2 - c_\nu}\,\sqrt{s_3 - c_\nu}\,\sqrt{\psi'(s_2)}\,\sqrt{\psi'(s_3)}} \\ &= 4i\,\frac{S_4(s_1 - c_\nu) - S_1(s_4 - c_\nu)}{\sqrt{s_1 - c_\nu}\,\sqrt{s_4 - c_\nu}\,\sqrt{\psi'(s_1)}\,\sqrt{\psi'(s_4)}} \quad \text{(mit Rücksicht auf (19.))}. \end{aligned} \tag{30.}$$

Dieselben Betrachtungen, die wir bereits früher zur Umformung der Gleichung (12.) anstellten, führen die drei letzten Gleichungen über in die Form

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\psi'(s_1)}\,\sqrt{\psi'(s_2)}}{s_2 - s_1}\,niD_\nu &= \sqrt{s_1 - c_\nu}\,\sqrt{s_2 - c_\nu} - (-1)^\varepsilon\,\sqrt{s_3 - c_\nu}\,\sqrt{s_4 - c_\nu} \\ -\frac{\sqrt{\psi'(s_1)}\,\sqrt{\psi'(s_3)}}{s_3 - s_1}\,\frac{n}{2}\,D_\nu(d_\nu + d_\nu^{-1}) &= \sqrt{s_1 - c_\nu}\,\sqrt{s_3 - c_\nu} - (-1)^\varepsilon\,\sqrt{s_2 - c_\nu}\,\sqrt{s_4 - c_\nu} \\ \frac{\sqrt{\psi'(s_1)}\,\sqrt{\psi'(s_4)}}{s_4 - s_1}\,\frac{n}{2}\,iD_\nu(d_\nu - d_\nu^{-1}) &= \sqrt{s_1 - c_\nu}\,\sqrt{s_4 - c_\nu} - (-1)^\varepsilon\,\sqrt{s_2 - c_\nu}\,\sqrt{s_3 - c_\nu} \end{aligned} \tag{31.}$$

unter ε dieselbe Zahl verstanden, wie oben in Gleichung (16.). Durch Quadrieren der ersten dieser Gleichungen ergibt sich mit Rücksicht auf (15.)

$$\left\{ \frac{\sqrt{\psi'(s_1)}\ \sqrt{\psi'(s_2)}}{s_2 - s_1}\ ni \right\}^2 D_\nu^2 = s_1 s_2 + s_3 s_4 - c_\nu (s_1 + s_2 + s_3 + s_4) + 2 c_\nu^2 - 2 m_\nu \varphi'(c_\nu),$$

woraus man erkennt

$$\sum_1^3{}_\nu \frac{D_\nu^2}{\varphi'(c_\nu)} = 0;$$

ebenso folgt aus den beiden letzten der Gleichungen (31.)

$$\sum_1^3{}_\nu (d_\nu \pm d_\nu')^2 \frac{D_\nu^2}{\varphi'(c_\nu)} = 0.$$

Bezeichnet man jetzt mit $\chi(x)$ die Funktion

$$\chi(x) = (x - d_1^2)\ (x - d_2^2)\ (x - d_3^2), \tag{32.}$$

so kann die Lösung dieser Gleichungen offenbar in die Form gesetzt werden

$$\frac{D_\nu^2}{\varphi'(c_\nu)} = \varrho^2 \frac{d_\nu^2 - d_1^2\, d_2^2\, d_3^2}{\chi'(d_\nu^2)} \tag{33.}$$

unter ϱ^2 einen vom Index ν unabhängigen Faktor verstanden. Durch Einführung dieses Resultats in der Gleichung (24.) ergibt sich

$$\eta_\nu^0 \xi_\nu - \xi_\nu^0 \eta_\nu = \varrho \frac{\sqrt{d_\nu^2 - d_1^2 d_2^2 d_3^2}}{\sqrt{\chi'(d_\nu^2)}} \gamma_\nu. \tag{34.}$$

Endlich folgt hieraus, da $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ ist, die Beziehung

$$\sum_1^3{}_\nu \frac{\chi'(d_\nu^2)}{d_\nu^2 - d_1^2 d_2^2 d_3^2} (\eta_\nu^0 \xi_\nu - \xi_\nu^0 \eta_\nu)^2 = \varrho^2 = \text{const.}, \tag{35.}$$

welche das gesuchte vierte Integral darstellt. Die Gleichungen (21.) und (35.) zusammengenommen sind jetzt nach Einführung der neuen Variabeln ξ_ν, η_ν durch die Formeln (10.) dem System (3) vollkommen äquivalent.

§ 4.

Die Lösung des Problems durch Thetafunktionen.

Die Formeln (21.) des vorigen Paragraphen gestatten es, die Variabeln ξ_ν, η_ν gewissen Thetafunktionen von zwei Argumenten proportional zu setzen, während sich alsdann aus Gleichung (35.) der Proportionalitätsfaktor bestimmen lässt.

Zu diesem Zweck setzen wir in Formel (3.) des § 2 speciell $v_0 = 0$; $w_0 = 0$ ein, so folgt mit Rücksicht darauf, dass (δ_ν) und (ε_ν) ungerade Charakteristiken sind

$$\sum_1^3{}^{\nu} i_\nu^2 \left\{ \vartheta(\delta_\nu)\,\vartheta(\varepsilon_\nu)(v,w) \pm \vartheta(\varepsilon_\nu)\,\vartheta(\delta_\nu)(v,w) \right\}^2 = 0. \tag{1.}$$

Vermehrt man aber in derselben Formel v_0 und w_0 um die zur Charakteristik $(\delta_\nu) + (\varepsilon_\nu)$ gehörigen halben Perioden, so folgt

$$\sum_1^4{}^{\nu} i_\nu^2 \left\{ i_{\nu_1}\,\vartheta(\varepsilon_\nu)(v_0,w_0)\,\vartheta(\varepsilon_\nu)(v,w) \pm i_{\nu_2}\,\vartheta(\delta_\nu)(v_0,w_0)\,\vartheta(\delta_\nu)(v,w) \right\}^2 = 0,$$

wobei wieder i_{ν_1} und i_{ν_2} Potenzen von i sind. Auch überzeugt man sich leicht aus der Beschaffenheit der Charakteristiken (ε_ν) und (δ_ν), wie sie in der Tabelle Seite 10 zusammengestellt sind, dass das Produkt $i_{\nu_1} \cdot i_{\nu_2}$ vom Index ν unabhängig ist. Man kann daher in der letzten Gleichung jeden Term der Summe durch $i_{\nu_1} \cdot i_{\nu_2}$ dividieren. Setzt man dann wieder $v_0 = w_0 = 0$, und schreibt der Einfachheit halber $\frac{i_{\nu_1}}{i_{\nu_2}} = i_\nu'$, so folgt

$$\sum_1^3{}^{\nu} i_\nu^2 \left\{ \sqrt{i_\nu'}\,\vartheta(\varepsilon_\nu)\,\vartheta(\varepsilon_\nu)(v,w) \pm \frac{1}{\sqrt{i_\nu'}}\,\vartheta(\delta_\nu)\,\vartheta(\delta_\nu)(v,w) \right\}^2 = 0. \tag{2.}$$

Wenn man nun

$$d_\nu^2 = i_\nu' \frac{\vartheta^2(\varepsilon_\nu)}{\vartheta^2(\delta_\nu)} \tag{3.}$$

setzt, so geht aus den Gleichungen (1.) und (2.) unmittelbar hervor, dass die Variabeln ξ_ν, η_ν des vorigen Paragraphen in der Form angesetzt werden dürfen

$$\begin{aligned} \xi_\nu &= \sigma\, i_\nu\, \vartheta(\delta_\nu)\,\vartheta(\varepsilon_\nu)(v,w) \\ \eta_\nu &= \sigma\, i_\nu\, \vartheta(\varepsilon_\nu)\,\vartheta(\delta_\nu)(v,w); \end{aligned} \tag{4.}$$

denn es ergibt sich alsdann

$$\sum_1^3{}^{\nu} (\xi_\nu \pm \eta_\nu)^2 = 0; \quad \sum_1^3{}^{\nu} (d_\nu\, \xi_\nu \pm d_\nu^{-1} \eta_\nu)^2 = 0. \tag{5.}$$

Die Werte der i_ν' sind in die Tabelle Seite 10 mitaufgenommen. Ferner gibt dieselbe in der letzten Colonne die Anordnung der durch Gleichung (3.) definierten Grössen d_ν^2 unter der Voraussetzung reeller Periodicitätsmoduln; dabei ist $d_1^2\, d_2^2\, d_3^2 = d_4^2$ gesetzt und falls i_ν' imaginär, $i\, d_\nu^2 = \delta_\nu$; $i\, d_1^2\, d_2^2\, d_3^2 = \delta_4$.

Die Grössen ξ_ν^0, η_ν^0 des vorigen Paragraphen sind gewisse Constanten, welche, wie schon hervorgehoben, die obigen Gleichungen (5.) befriedigen; man kann sie daher in die Form setzen

$$\begin{aligned} \xi_\nu^0 &= \tau\, i_\nu\, \vartheta(\delta_\nu)\,\vartheta(\varepsilon_\nu)(v_0,w_0) \\ \eta_\nu^0 &= \tau\, i_\nu\, \vartheta(\varepsilon_\nu)\,\vartheta(\delta_\nu)(v_0,w_0). \end{aligned} \tag{6.}$$

Der in § 2 durch T_ν bezeichnete Ausdruck gewinnt dadurch für $\nu = 1, 2, 3$ die Gestalt

$$T_\nu = \frac{1}{\sigma\tau} \frac{\eta_\nu^0 \xi_\nu \pm \xi_\nu^0 \eta_\nu}{i_\nu \vartheta(\varepsilon_\nu) \vartheta(\delta_\nu)}. \tag{7.}$$

Setzt man aber in den Gleichungen (5.) $v = 0, w = 0$, so folgt

$$\sum_1^3 \nu\, i_\nu^2 \vartheta^2(\delta_\nu) \vartheta^2(\varepsilon_\nu) = 0$$

$$\sum_1^3 \nu\, (d_\nu \pm d_\nu^{-1})^2 i_\nu^2 \vartheta^2(\delta_\nu) \vartheta^2(\varepsilon_\nu) = 0,$$

woraus sich ergibt

$$i_\nu^2 \vartheta^2(\delta_\nu) \vartheta^2(\varepsilon_\nu) = \mu^2 \frac{d_\nu^2 - d_1^2 d_2^2 d_3^2}{\chi'(d_\nu^2)}, \tag{8.}$$

wo μ^2 ein Proportionalitätsfaktor ist, und $\chi(x)$ dieselbe Funktion bedeutet, wie im vorigen Paragraphen.

Aus Gleichung (7.) entsteht hiernach

$$T_\nu = \frac{1}{\tau\,\mu\,\sigma} \frac{\sqrt{\chi'(d_\nu^2)}}{\sqrt{d_\nu^2 - d_1^2 d_2^2 d_3^2}} (\eta_\nu^0 \xi_\nu \pm \xi_\nu^0 \eta_\nu) \tag{9.}$$

und indem man quadriert und nach ν summiert

$$\sum_1^3 \nu \frac{\chi'(d_\nu^2)}{d_\nu^2 - d_1^2 d_2^2 d_3^2} (\eta_\nu^0 \xi_\nu \pm \xi_\nu^0 \eta_\nu)^2 = -\tau^2 \mu^2 \sigma^2 T_4^2. \tag{10.}$$

Fasst man hier speziell das untere Zeichen ins Auge, so hat nach Formel (35.) in § 3 die linke Seite den konstanten Wert ϱ^2, und aus (34.) ergibt sich dann leicht, da stets $i_4 = i$ ist,

$$\gamma_\nu = \pm i_\nu \frac{\vartheta(\delta_\nu)(v_0, w_0) \vartheta(\varepsilon_\nu)(v, w) - \vartheta(\varepsilon_\nu)(v_0, w_0) \vartheta(\delta_\nu)(v, w)}{\vartheta(\delta_4)(v_0, w_0) \vartheta(\varepsilon_4)(v, w) - \vartheta(\varepsilon_4)(v_0, w_0) \vartheta(\delta_4)(v, w)}. \tag{11.}$$

Dabei kann durch geeignete Wahl der positiven Richtung der Coordinatenachsen stets erreicht werden, dass das obere Zeichen gilt.

Um nun die Rotationsgeschwindigkeiten p_ν ebenfalls durch Thetafunktionen darzustellen, eliminieren wir aus den Gleichungen (10.) in § 3 die Variable γ_ν; hiedurch findet sich p_ν als lineare ganze Funktion von ξ_ν und η_ν, und indem man für diese ihren Ausdruck in Thetafunktionen einsetzt, ergibt sich

$$p_\nu = i_\nu \frac{h_\nu \vartheta(\varepsilon_\nu)(v, w) - h_\nu' \vartheta(\delta_\nu)(v, w)}{\vartheta(\delta_4)(v_0, w_0) \vartheta(\varepsilon_4)(v, w) - \vartheta(\varepsilon_4)(v_0, w_0) \vartheta(\delta_4)(v, w)}, \tag{12.}$$

wobei die Constanten h_ν und h_ν' die Werte haben

$$\begin{aligned} h_\nu &= -\frac{\varrho}{\tau\,\mu} \vartheta(\delta_\nu) \frac{1}{A_\nu D_\nu} \left\{ \frac{S_1}{\sqrt{s_1 - c_\nu}\sqrt{\psi'(s_1)}} - i \frac{S_2}{\sqrt{s_2 - c_\nu}\sqrt{\psi'(s_2)}} \right\} \\ h_\nu' &= -\frac{\varrho}{\tau\,\mu} \vartheta(\varepsilon_\nu) \frac{1}{A_\nu D_\nu} \left\{ \frac{S_1}{\sqrt{s_1 - c_\nu}\sqrt{\psi'(s_1)}} + i \frac{S_2}{\sqrt{s_2 - c_\nu}\sqrt{\psi'(s_2)}} \right\}. \end{aligned} \tag{13.}$$

Um diesen Ausdrücken eine bessere Form zu geben, setze man für D_ν den Wert aus Formel (33.) § 3 ein; es folgt dann mit Rücksicht auf die obige Gleichung (8.)

$$\tau\, i_\nu\, \vartheta(\varepsilon_\nu)\, h_\nu = -\frac{1}{A_\nu \sqrt{\varphi'(c_\nu)}} \left\{ \frac{S_1}{\sqrt{s_1 - c_\nu}\ \sqrt{\psi'(s_1)}} - i \frac{S_2}{\sqrt{s_2 - c_\nu}\ \sqrt{\psi'(s_2)}} \right\}$$

$$\tau\, i_\nu\, \vartheta(\delta_\nu)\, h'_\nu = -\frac{1}{A_\nu \sqrt{\varphi'(c_\nu)}} \left\{ \frac{S_1}{\sqrt{s_1 - c_\nu}\ \sqrt{\psi'(s_1)}} + i \frac{S_2}{\sqrt{s_2 - c_\nu}\ \sqrt{\psi'(s_2)}} \right\}.$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen wollen wir bez. mit F und G bezeichnen; es ist dann

$$d_\nu^{-1} F_\nu = \frac{1}{A_\nu \sqrt{\varphi'(c_\nu)}} \left\{ \frac{S_3}{\sqrt{s_3 - c_\nu}\ \sqrt{\psi'(s_3)}} - i \frac{S_4}{\sqrt{s_4 - c_\nu}\ \sqrt{\psi'(s_4)}} \right\}$$

$$d_\nu\, G_\nu = -\frac{1}{A_\nu \sqrt{\varphi'(c_\nu)}} \left\{ \frac{S_3}{\sqrt{s_3 - c_\nu}\ \sqrt{\psi'(s_3)}} + i \frac{S_4}{\sqrt{s_4 - c_\nu}\ \sqrt{\psi'(s_4)}} \right\}.$$

Da nun $c_\nu = k^2 \frac{A_1 A_2 A_3}{A_\nu}$; also $A_\nu = \frac{\sqrt{c_1 c_2 c_3}}{k\, c_\nu}$ ist, so folgen hieraus leicht die Relationen

$$\sum_1^3{}^\nu (\xi_\nu^0 \pm \eta_\nu^0)(G_\nu \pm F_\nu) = 0$$

$$\sum_1^3{}^\nu (d_\nu \xi_\nu^0 \pm d_\nu^{-1} \eta_\nu^0)(d_\nu G_\nu \pm d_\nu^{-1} F_\nu) = 0.$$

Nun wissen wir aber, dass

$$\sum_1^3{}^\nu (\xi_\nu^0 \pm \eta_\nu^0)^2 = 0; \quad \sum_1^3{}^\nu (d_\nu \xi_\nu^0 \pm d_\nu^{-1} \eta_\nu^0)^2 = 0$$

ist, und indem wir ξ_ν^0, η_ν^0 als Funktionen von v_0 und w_0 betrachten gemäss den Gleichungen (6.), können wir hier nach v_0 und w_0 differentiieren, und erhalten

$$\sum_1^3{}^\nu (\xi_\nu^0 \pm \eta_\nu^0)\left(\frac{\partial \xi_\nu^0}{\partial v_0} \pm \frac{\partial \eta_\nu^0}{\partial v_0}\right) = 0$$

$$\sum_1^3{}^\nu (d_\nu \xi_\nu^0 \pm d_\nu^{-1} \eta_\nu^0)\left(d_\nu \frac{\partial \xi_\nu^0}{\partial v_0} \pm d_\nu^{-1} \frac{\partial \eta_\nu^0}{\partial v_0}\right) = 0$$

nebst zwei analogen Gleichungen für die Differentiation nach w_0. Demnach müssen sich G_ν und F_ν als lineare Funktionen von ξ_ν, $\frac{\partial \xi_\nu}{\partial v_0}$, $\frac{\partial \xi_\nu}{\partial w_0}$, bez. η_ν, $\frac{\partial \eta_\nu}{\partial v_0}$, $\frac{\partial \eta_\nu}{\partial w_0}$ mit denselben Coefficienten darstellen lassen. So erhält man schliesslich

$$\begin{aligned} h_\nu &= a\, \vartheta(\delta_\nu)(v_0, w_0) + b \frac{\partial \vartheta(\delta_\nu)(v_0, w_0)}{\partial v_0} + c \frac{\partial \vartheta(\delta_\nu)(v_0, w_0)}{\partial w_0} \\ h'_\nu &= a\, \vartheta(\varepsilon_\nu)(v_0, w_0) + b \frac{\partial \vartheta(\varepsilon_\nu)(v_0, w_0)}{\partial v_0} + c \frac{\partial \vartheta(\varepsilon_\nu)(v_0, w_0)}{\partial w_0} \end{aligned} \qquad (14.)$$

wo die a, b, c vom Index ν unabhängig sind.

Bezeichnet man jetzt den totalen Differentialquotienten nach der Zeit durch ein vorgesetztes D,

$$\text{also } D = \frac{\partial}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial}{\partial w}\frac{dw}{dt},$$

$$\text{ebenso } D_0 = \frac{\partial}{\partial v_0}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial}{\partial w_0}\frac{dw}{dt},$$

so hat man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} D\gamma_1 &= \gamma_2 p_3 - \gamma_3 p_2 \\ D\gamma_2 &= \gamma_3 p_1 - \gamma_1 p_3 \\ D\gamma_3 &= \gamma_1 p_2 - \gamma_2 p_1. \end{aligned} \tag{15.}$$

Aber da $\gamma_\nu = i\frac{T_\nu}{T_4}$ ist, so erhält man aus den Relationen (11.) des § 2 leicht

$$\begin{aligned} i\,D\gamma_1 &= \gamma_2 D_0\gamma_3 - \gamma_3 D_0\gamma_2 \\ i\,D\gamma_2 &= \gamma_3 D_0\gamma_1 - \gamma_1 D_0\gamma_3 \\ i\,D\gamma_3 &= \gamma_1 D_0\gamma_2 - \gamma_2 D_0\gamma_1. \end{aligned} \tag{16.}$$

Durch Vergleichung von (15.) mit (16.) ergibt sich

$$i\,p_\nu = D_0\gamma_\nu + f(t)\cdot\gamma_\nu,$$

wo $f(t)$ eine noch zu bestimmende Funktion ist.

Führt man für γ_ν den gefundenen Ausdruck aus (11.) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} i\,p_\nu = {} & i_\nu \frac{\frac{\partial}{\partial v_0}\vartheta(\delta_\nu)(v_0,w_0)\,\vartheta(\varepsilon_\nu)(v,w) - \frac{\partial}{\partial v_0}\vartheta(\varepsilon_\nu)(v_0,w_0)\,\vartheta(\delta_\nu)(v,w)}{\vartheta(\delta_4)(v_0,w_0)\,\vartheta(\varepsilon_4)(v,w) - \vartheta(\varepsilon_4)(v_0,w_0)\,\vartheta(\delta_4)(v,w)}\cdot\frac{dv}{dt} \\ & + i_\nu \frac{\frac{\partial}{\partial w_0}\vartheta(\delta_\nu)(v_0,w_0)\,\vartheta(\varepsilon_\nu)(v,w) - \frac{\partial}{\partial w_0}\vartheta(\varepsilon_\nu)(v_0,w_0)\,\vartheta(\delta_\nu)(v,w)}{\vartheta(\delta_4)(v_0,w_0)\,\vartheta(\varepsilon_4)(v,w) - \vartheta(\varepsilon_4)(v_0,w_0)\,\vartheta(\delta_4)(v,w)}\cdot\frac{dw}{dt} \\ & + i_\nu \frac{\vartheta(\delta_\nu)(v_0,w_0)\,\vartheta(\varepsilon_\nu)(v,w) - \vartheta(\varepsilon_\nu)(v_0,w_0)\,\vartheta(\delta_\nu)(v,w)}{\vartheta(\delta_4)(v_0,w_0)\,\vartheta(\varepsilon_4)(v,w) - \vartheta(\varepsilon_4)(v_0,w_0)\,\vartheta(\delta_4)(v,w)}\cdot F(t). \end{aligned}$$

Die Vergleichung dieser Formel mit (12.) liefert für $\nu = 1, 2, 3$ drei Gleichungen zur Bestimmung der unbekannten Funktionen $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$, $F(t)$. Diese zerfallen jedoch sofort in das System von sechs Gleichungen

$$\begin{aligned} i\,h_\nu &= \frac{\partial}{\partial v_0}\vartheta(\delta_\nu)(v_0,w_0)\frac{dv}{dt} + \frac{\partial}{\partial w_0}\vartheta(\delta_\nu)(v_0,w_0)\frac{dw}{dt} + \vartheta(\delta_\nu)(v_0,w_0)\,F(t) \\ i\,h'_\nu &= \frac{\partial}{\partial v_0}\vartheta(\varepsilon_\nu)(v_0,w_0)\frac{dv}{dt} + \frac{\partial}{\partial w_0}\vartheta(\varepsilon_\nu)(v_0,w_0)\frac{dw}{dt} + \vartheta(\varepsilon_\nu)(v_0,w_0)\,F(t) \end{aligned} \tag{17.}$$

unter h_ν und h'_ν die Grössen aus Gleichung (13.) verstanden, sowie es nur gelingt nachzuweisen, dass diese sechs Gleichungen nach den drei Unbekannten $\frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}, F(t)$ überhaupt auflösbar sind. Dies ist aber nach den Relationen (14.) ohne weiters evident. Es ergibt sich sonach, dass $\frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}, F(t)$ Constante sind, die wir bez. durch ig_1, ig_2, ig_3, bezeichnen wollen, sodass

$$\begin{aligned} v &= ig_1\, t + g'_1 \\ w &= ig_2\, t + g'_2 \end{aligned} \tag{18.}$$

ist. Bezeichnet man nun die Operation

$$(g_1 \frac{\partial}{\partial v_0} + g_2 \frac{\partial}{\partial w_0} + g_3)$$

einfach durch Δ, so erhält man für p_ν die Form

$$p_\nu = i_\nu \frac{\Delta\, \vartheta(\delta_\nu)(v_0, w_0)\, \vartheta(\varepsilon_\nu)(v, w) - \Delta\, \vartheta(\varepsilon_\nu)(v_0, w_0)\, \vartheta(\delta_\nu)(v, w)}{\vartheta(\delta_4)(v_0, w_0)\, \vartheta(\varepsilon_4)(v, w) - \vartheta(\varepsilon_4)(v_0, w_0)\, \vartheta(\delta_4)(v, w)}. \tag{19.}$$

Die Constanten g'_1, g'_2 ergeben sich aus zwei beliebigen der Gleichungen (11.) und (19.), indem man für t die Anfangszeit einsetzt.

Bezeichnen wir im folgenden mit T_ν den im § 2 definierten Ausdruck lediglich mit Beziehung auf das untere Zeichen, so hat γ_ν den Wert

$$\gamma_\nu = i \frac{T_\nu}{T_4}$$

und indem wir weiter die Grössen einführen

$$\alpha^0_\nu = \frac{T_4 D_0 T_\nu - T_\nu D_0 T_4}{T_4 \sqrt{\sum_1^4{}^\nu (D_0 T_\nu)^2}};\quad \beta^0_\nu = i \frac{T_4 D T_\nu - T_\nu D T_4}{T_4 \sqrt{\sum_1^4{}^\nu (D_0 T_\nu)^2}},$$

ergibt sich unter Berücksichtigung der beiden letzten Formeln des § 2 ohne Schwierigkeit

$$\begin{aligned} &\alpha_1^{0\,2} + \alpha_2^{0\,2} + \alpha_3^{0\,2} = 1 && \alpha^0_1 \beta^0_1 + \alpha^0_2 \beta^0_2 + \alpha^0_3 \beta^0_3 = 0 \\ &\beta_1^{0\,2} + \beta_2^{0\,2} + \beta_3^{0\,2} = 1 && \alpha^0_1 \gamma_1 + \alpha^0_2 \gamma_2 + \alpha^0_3 \gamma_3 = 0 \\ &\alpha^0_1 = + (\beta^0_2 \gamma_3 - \gamma_2 \beta^0_3) && \beta^0_1 \gamma_1 + \beta^0_2 \gamma_2 + \beta^0_3 \gamma_3 = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die in § 1 definierten Richtungscosinus α_ν, β_ν in der allgemeinen Form enthalten sind

$$\begin{aligned} \alpha_\nu \pm i\beta_\nu &= (\alpha^0_\nu \pm i\beta^0_\nu)\, e^{\pm i\lambda(t)} \\ &= \frac{(T_4 D_0 T_\nu - T_\nu D_0 T_4) \mp (T_4 D T_\nu - T_\nu D T_4)}{T_4 \sqrt{\sum_1^4{}^\nu (D_0 T_\nu)^2}} \cdot e^{\pm i\lambda(t)} \end{aligned}$$

und es handelt sich darum, die Funktion $\lambda(t)$ zu bestimmen. Zunächst ergibt die Formel (7.) des § 2

$$T_4 \sqrt{\sum_1^4{}^{\nu} (D_0 T_\nu)^2} \cdot (\alpha_\nu \pm i\beta_\nu)$$

$$= -i_4 i_\nu \left[\vartheta(\varepsilon_\nu)\vartheta(\delta_\nu)(v \pm v_0, w \pm w_0) - \vartheta(\delta_\nu)\vartheta(\varepsilon_\nu)(v \pm v_0, w \pm w_0) \right] \qquad (20.)$$

$$\times \left[D\vartheta(\varepsilon_4)\vartheta(\delta_4)(v \mp v_0, w \mp w_0) - D\vartheta(\delta_4)\vartheta(\varepsilon_4)(v \mp v_0, w \mp w_0) \right] e^{\pm i\lambda(t)}.$$

Hieraus folgt weiter

$$T_4^2 \left[\sum_1^4{}^{\nu} (D_0 T_\nu)^2 \right] \cdot (\alpha_\nu + i\beta_\nu)(\alpha_\nu - i\beta_\nu)$$

$$= i_4^2 i_\nu^2 \left[\vartheta(\varepsilon_\nu)\vartheta(\delta_\nu)(v + v_0, w + w_0) - \vartheta(\delta_\nu)\vartheta(\varepsilon_\nu)(v + v_0, w + w_0) \right]$$

$$\times \left[\vartheta(\varepsilon_\nu)\vartheta(\delta_\nu)(v - v_0, w - w_0) - \vartheta(\delta_\nu)\vartheta(\varepsilon_\nu)(v - v_0, w - w_0) \right]$$

$$\times \left[D\vartheta(\varepsilon_4)\vartheta(\delta_4)(v + v_0, w + w_0) - D\vartheta(\delta_4)\vartheta(\varepsilon_4)(v + v_0, w + w_0) \right]$$

$$\times \left[D\vartheta(\varepsilon_4)\vartheta(\delta_4)(v - v_0, w - w_0) - D\vartheta(\delta_4)\vartheta(\varepsilon_4)(v - v_0, w - w_0) \right].$$

Wie man sich leicht überzeugt, hat aber das Produkt der beiden ersten Klammern mulipliciert mit i_ν^2 den Wert $T_\nu^2 + T_4^2$. Andrerseits ist

$$(\alpha_\nu + i\beta_\nu)(\alpha_\nu - i\beta_\nu) = 1 - \gamma_\nu^2 = \frac{T_\nu^2 + T_4^2}{T_4^2}.$$

Führt man den sich hieraus ergebenden Wert von $\sum_1^4{}^{\nu} (D_0 T_\nu)^2$ in (20.) ein, so erhält man

$$\alpha_\nu \pm i\beta_\nu = -\frac{i_\nu}{i_4} \frac{\vartheta(\varepsilon_\nu)\vartheta(\delta_\nu)(v \pm v_0, w \pm w_0) - \vartheta(\delta_\nu)\vartheta(\varepsilon_\nu)(v \pm v_0, w \pm w_0)}{\vartheta(\delta_4)(v_0, w_0)\vartheta(\varepsilon_4)(v, w) - \vartheta(\varepsilon_4)(v_0, w_0)\vartheta(\delta_4)(v, w)}$$

$$\times \left[\frac{D\vartheta(\varepsilon_4)\vartheta(\delta_4)(v - v_0, w - w_0) - D\vartheta(\delta_4)\vartheta(\varepsilon_4)(v - v_0, w - w_0)}{D\vartheta(\varepsilon_4)\vartheta(\delta_4)(v + v_0, w + w_0) - D\vartheta(\delta_4)\vartheta(\varepsilon_4)(v + v_0, w + w_0)} \right]^{\pm \frac{1}{2}} e^{\pm i\lambda(t)}$$

oder einfacher

$$\alpha_\nu \pm i\beta_\nu$$

$$= \frac{i_\nu}{i_4} \frac{\vartheta(\varepsilon_\nu)\vartheta(\delta_\nu)(v \pm v_0, w \pm w_0) - \vartheta(\delta_\nu)\vartheta(\varepsilon_\nu)(v \pm v_0, w \pm w_0)}{\vartheta(\delta_4)(v_0, w_0)\vartheta(\varepsilon_4)(v, w) - \vartheta(\varepsilon_4)(v_0, w_0)\vartheta(\delta_4)(v, w)} \cdot e^{\pm i\omega(t)}. \qquad (21.)$$

Um $\omega(t)$ zu bestimmen, vergleicht Kötter die Werte

$$q_3 = \gamma_1 p_1 + \gamma_2 p_2 + \gamma_3 p_3$$

und

$$q_3 = \sum_1^3{}^{\nu} \alpha_\nu \frac{d\beta_\nu}{dt} = \frac{i}{2} \sum_1^3{}^{\nu} (\alpha_\nu + i\beta_\nu) \frac{d}{dt}(\alpha_\nu - i\beta_\nu).$$

Da wir nun fanden

$$\gamma_\nu = i\frac{T_\nu}{T_4}; \quad p_\nu = i\frac{g_1 \frac{\partial T_\nu}{\partial v_0} + g_3 \frac{\partial T_\nu}{\partial w_0} + g_3 T_\nu}{T_4},$$

so folgt leicht aus der ersten Form

$$q_3 = \frac{g_1 \frac{\partial T_4}{\partial v_0} + g_2 \frac{\partial T_4}{\partial w_0} + g_3 T_4}{T_4}.$$

Ferner ergibt sich, unter D die Differentiation nach der Zeit verstanden, also $D = ig_1 \frac{\partial}{\partial v} + ig_2 \frac{\partial}{\partial w}$

$$(\alpha_\nu + i\beta_\nu)\frac{d}{dt}(\alpha_\nu - i\beta_\nu)$$

$$= -\frac{T_\nu^2 + T_4^2}{T_4^2}\left(i\frac{d\omega}{dt} + \frac{DT_4}{T_4}\right)$$

$$+ \frac{i_\nu^2}{T_4^2}\left[\vartheta(\varepsilon_\nu)\vartheta(\delta_\nu)(v+v_0, w+w_0) - \vartheta(\delta_\nu)\vartheta(\varepsilon_\nu)(v+v_0, w+w_0)\right]$$

$$\times\left[\vartheta(\varepsilon_\nu) D\vartheta(\delta_\nu)(v-v_0, w-w_0) - \vartheta(\delta_\nu) D\vartheta(\varepsilon_\nu)(v-v_0, w-w_0)\right].$$

Der letzte Term kann offenbar auch geschrieben werden

$$\frac{i_\nu^2}{2T_4^2}(D-D_0)\left\{\left[\vartheta(\varepsilon_\nu)\vartheta(\delta_\nu)(v+v_0, w+w_0) - \vartheta(\delta_\nu)\vartheta(\varepsilon_\nu)(v+v_0, w+w_0)\right]\right.$$

$$\left.\times\left[\vartheta(\varepsilon_\nu)\vartheta(\delta_\nu)(v-v_0, w-w_0) - \vartheta(\delta_\nu)\vartheta(\varepsilon_\nu)(v-v_0, w-w_0)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2T_4^2}(D-D_0)(T_4^2 + T_\nu^2),$$

wo natürlich $D_0 = ig_1\frac{\partial}{\partial v_0} + ig_2\frac{\partial}{\partial w_0}$ gesetzt ist. Mit Rücksicht darauf folgt, indem man nach ν summiert

$$q_3 = -i\left(i\frac{d\omega}{dt} + \frac{DT_4}{T_4}\right) + \frac{i}{2T_4^2}(DT_4^2 - D_0T_4^2)$$

$$= -\frac{d\omega}{dt} + \frac{g_1\frac{\partial T_4}{\partial v_0} + g_2\frac{\partial T_4}{\partial w_0}}{T_4}$$

und indem man diesen Ausdruck mit dem oben gefundenen vergleicht

$$\omega = g_3 t + g_3'. \tag{22.}$$

Der reelle Teil der Constanten g_3' kann dabei durch passende Wahl der X und Y-Achse zum Verschwinden gebracht werden.

Endlich wollen wir noch die Componenten der Rotationsgeschwindigkeit um die im Raum festen Achsen durch Thetafunktionen ausdrücken. Die Grösse q_3 fanden wir schon oben; ausgeschrieben hat sie die Gestalt

$$q_3 = \frac{\Delta\vartheta(\delta_4)(v_0, w_0)\vartheta(\varepsilon_4)(v, w) - \Delta\vartheta(\varepsilon_4)(v_0, w_0)\vartheta(\delta_4)(v, w)}{\vartheta(\delta_4)(v_0, w_0)\vartheta(\varepsilon_4)(v, w) - \vartheta(\varepsilon_4)(v_0, w_0)\vartheta(\delta_4)(v, w)}. \tag{23.}$$

Um die anderen Componenten zu erhalten, beachte man, dass $\sum_1^3{}^\nu \alpha_\nu \gamma_\nu = 0$, also $\sum_1^3{}^\nu \alpha_\nu T_\nu = 0$, ebenso $\sum_1^3{}^\nu \beta_\nu T_\nu = 0$ ist; dann erhält man

$$\begin{aligned} q_1 \pm i q_2 &= \sum_1^3{}^\nu (\alpha_\nu \pm i\beta_\nu) p_\nu \\ &= \sum_1^3{}^\nu (\alpha_\nu \pm i\beta_\nu) \frac{D_0 T_\nu}{T_4} \\ &= \sum_1^3{}^\nu (\alpha_\nu \pm i\beta_\nu) \frac{T_4 D_0 T_\nu - T_\nu D_0 T_4}{T_4^2}. \end{aligned}$$

Indem man für $\alpha_\nu \pm i\beta_\nu$ den gefundenen Wert einsetzt, und $T_4 D_0 T_\nu - T_\nu D_0 T_4$ wieder nach Formel (7.) § 2 entwickelt, findet man

$$\begin{aligned} q_1 \pm i q_2 = &- \frac{i_4}{2 T_4^3} \Big[D_0 \vartheta(\varepsilon_4) \vartheta(\delta_4)(v \mp v_0, w \mp w_0) - D_0 \vartheta(\delta_4) \vartheta(\varepsilon_4)(v \mp v_0, w \mp w_0) \Big] \\ &\times \sum_1^3{}^\nu i_\nu^2 \Big[\vartheta(\varepsilon_\nu) \vartheta(\delta_\nu)(v \pm v_0, w \pm w_0) - \vartheta(\delta_\nu) \vartheta(\varepsilon_\nu)(v \pm v_0, w \pm w_0) \Big]^2 e^{\pm i\omega} \\ &- \frac{i_4}{2 T_4^3} \Big[D_0 \vartheta(\varepsilon_4) \vartheta(\delta_4)(v \pm v_0, w \pm w_0) - D_0 \vartheta(\delta_4) \vartheta(\varepsilon_4)(v \pm v_0, w \pm w_0) \Big] \\ &\times \sum_1^3{}^\nu (T_\nu^2 + T_4^2) e^{\pm i\omega}. \end{aligned}$$

Allein die erste Summe verschwindet, wie man sofort erkennt, wenn man in Formel (3.) § 2 $v_0 = 0, w_0 = 0$, und statt v, w bez. $v \pm v_0, w \pm w_0$ setzt. Somit ergibt sich die Endformel, da offenbar D_0 durch $i\Delta$ ersetzt werden darf*)

$$q_1 \pm i q_2 = -i \frac{\Delta \vartheta(\varepsilon_4) \vartheta(\delta_4)(v \pm v_0, w \pm w_0) - \Delta \vartheta(\delta_4) \vartheta(\varepsilon_4)(v \pm v_0, w \pm w_0)}{\vartheta(\delta_4)(v_0, w_0) \vartheta(\varepsilon_4)(v, w) - \vartheta(\varepsilon_4)(v_0, w_0) \vartheta(\delta_4)(v, w)} e^{\pm i\omega} \qquad (21.)$$

§ 5.

Realität der Lösung und Constantenbestimmung.

Es erübrigt noch zu zeigen, dass stets eine Darstellung möglich ist durch Thetafunktionen mit reellen Periodicitätsmoduln $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$. Diese sind bestimmt durch die Gleichungen

$$d_\nu^2 = i_\nu'' \frac{\vartheta^2(\varepsilon_\nu)}{\vartheta^2(\delta_\nu)} \quad (\nu = 1, 2, 3)$$

und lassen sich auch nach bekannten Regeln explicit durch bestimmte ultraelliptische Integrale darstellen, worauf wir nicht eingehen wollen. Die letzte Colonne der Tabelle Seite 10 zeigt, dass die Möglichkeit einer Darstellung mit reellen Moduln davon abhängt, dass die d_ν^2 gewissen Ungleichungen genügen. Zugleich erkennt man folgendes: Wenn erstens zwei d_ν^2 einander gleich sind, oder wenn zweitens das Produkt zweier d_ν^2 der Einheit gleich ist, oder wenn drittens ein d_ν^2 den Wert 0 hat: so verschwinden gewisse $\vartheta(\alpha)$, was zur Folge hat, dass unsre Thetafunktionen in elliptische Funktionen übergehen; diese drei Fälle wollen wir von der Betrachtung ausschliessen. Der erste derselben tritt

*) Es ist nämlich $\Delta \vartheta(\varepsilon_4) = g_1 \frac{\partial \vartheta(\varepsilon_4)}{\partial v} + g_2 \frac{\partial \vartheta(\varepsilon_4)}{\partial w} + g_3 \vartheta(\varepsilon_4)$; allein der letzte Term verschwindet, weil (ε_4) ungerade ist; dasselbe gilt für $\Delta \vartheta(\delta_4)$.

beispielsweise auf, wenn zwei der Grössen c_ν einander gleich sind, und es ist ja auch bereits in § 1 bemerkt, dass in diesem Fall das Problem nach einer von Kirchhoff angegebenen Methode durch elliptische Funktionen gelöst werden kann. Wir wollen daher im folgenden

$$c_1 < c_2 < c_3$$

voraussetzen.

Die Beschaffenheit der d_ν^2 hängt ab von den Grössen s_1, s_2, s_3, s_4. Dabei ist zunächst zu bemerken, dass gleichzeitig die Vorzeichen von

$$\frac{\sqrt{s_2 - c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_2)}} \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt{s_4 - c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_4)}}$$

geändert werden dürfen, weil dadurch die Gleichung (17.) in § 3, von der die Wahl der Vorzeichen abhängt, nicht alteriert wird. Dabei geht aber das betreffende d_ν^2 in seinen reciproken Wert über, und gleichzeitig werden ξ_ν und η_ν vertauscht.

Wir betrachten nun zunächst den Fall, dass die s_i sämtlich komplex sind. Man wähle alsdann für s_1 und s_2 zwei konjugierte Wurzeln, so dass man, wenn $\varepsilon^2 = 1$ ist, setzen kann

$$\frac{\sqrt{s_1 - c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_1)}} = A + Bi; \quad \frac{S_1}{\sqrt{s_1 - c_\nu}\sqrt{\psi'(s_1)}} = C + Di$$

$$\frac{\sqrt{s_2 - c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_2)}} = \pm(A - Bi); \quad \frac{S_2}{\sqrt{s_2 - c_\nu}\sqrt{\psi'(s_2)}} = \pm(C - Di)$$

$$\frac{\sqrt{s_3 - c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_3)}} = E + Fi; \quad \frac{S_3}{\sqrt{s_3 - c_\nu}\sqrt{\psi'(s_3)}} = G + Hi$$

$$\frac{\sqrt{s_4 - c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_4)}} = \pm\varepsilon(E - Fi); \quad \frac{S_4}{\sqrt{s_4 - c_\nu}\sqrt{\psi'(s_4)}} = \pm\varepsilon(G - Hi),$$

wobei gleichzeitig das obere oder untere Zeichen gilt. Zur Bestimmung von ε findet man

$$\varepsilon(A^2 + B^2)(E^2 + F^2) = \frac{\sqrt{s_1 - c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_1)}} \frac{\sqrt{s_2 - c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_2)}} \frac{\sqrt{s_3 - c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_3)}} \frac{\sqrt{s_4 - c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_4)}}$$

$$= \frac{m_\nu \varphi'(c_\nu)}{\psi'(s_1)\psi'(s_2)} \frac{s_2 - s_1}{s_4 - s_3}.$$

Wählt man also für s_2 und s_4 zwei Wurzeln mit gleichbezeichnetem imaginärem Bestandteil, so ist ε das Vorzeichen von $m_\nu \varphi'(c_\nu)$.

Im folgenden sollen reelle Grössen einfach mit R bezeichnet werden; so findet man leicht

$$\xi_\nu = R(1 \pm i); \quad \eta_\nu = R(1 \mp i)$$

$$\xi_\nu^0 = R\frac{1 \pm i}{\sqrt{\varphi'(c_\nu)}}; \quad \eta_\nu^0 = R\frac{1 \mp i}{\sqrt{\varphi'(c_\nu)}}$$

$$D_\nu = R; \quad d_\nu^2 = \varepsilon R^2.$$

Eine einfache Untersuchung der Gleichung $\psi(s) = 0$ zeigt nun, dass vier imaginäre Wurzeln nur auftreten können, wenn entweder alle drei $m_\nu \varphi'(c_\nu)$ positiv sind, oder nur $m_3 \varphi'(c_3)$ positiv ist, die andern negativ.

Im ersten Fall sind also alle d_ν^2 positiv, und indem man eventuell einige durch den reciproken Wert ersetzt, kann man stets erreichen, dass sie kleiner als 1 sind, oder allenfalls eines gleich 1; so erhält man die Anordnung, wenn $d_1^2\, d_2^2\, d_3^2 = d_4^2$ gesetzt wird

$$d_\alpha^2 > d_\beta^2 > d_\gamma^2 > d_4^2 > 0.$$

Aus Gleichung (33.) des § 3 geht dann überdies hervor, dass $\beta = 2$ und die Grösse ϱ reell ist.

Wir können demnach in diesem Fall jede der sechs ersten Nummern der Tabelle benutzen, und erhalten z. B. aus der ersten

$$\xi_\alpha = \sigma\, \vartheta \begin{pmatrix} 01 \\ 00 \end{pmatrix} \vartheta \begin{pmatrix} 11 \\ 00 \end{pmatrix} (v, w);\ \xi_2 = -i\,\sigma\, \vartheta \begin{pmatrix} 00 \\ 00 \end{pmatrix} \vartheta \begin{pmatrix} 10 \\ 00 \end{pmatrix} (v, w);\ \xi_\gamma = \sigma\, \vartheta \begin{pmatrix} 00 \\ 01 \end{pmatrix} \vartheta \begin{pmatrix} 10 \\ 01 \end{pmatrix} (v, w)$$

$$\eta_\alpha = \sigma\, \vartheta \begin{pmatrix} 11 \\ 00 \end{pmatrix} \vartheta \begin{pmatrix} 01 \\ 00 \end{pmatrix} (v, w);\ \eta_3 = -i\,\sigma\, \vartheta \begin{pmatrix} 10 \\ 00 \end{pmatrix} \vartheta \begin{pmatrix} 00 \\ 00 \end{pmatrix} (v, w);\ \eta_\gamma = \sigma\, \vartheta \begin{pmatrix} 10 \\ 01 \end{pmatrix} \vartheta \begin{pmatrix} 00 \\ 01 \end{pmatrix} (v, w).$$

Da $\dfrac{\xi_\nu}{\eta_\nu}, \dfrac{\xi_\nu^0}{\eta_\nu^0}$ $(\nu = 1, 2, 3)$ rein imaginär sein sollen, so muss entweder

$$v = R + \frac{i\pi}{2};\ w = R \text{ oder } v = R + \frac{i\pi}{2};\ w = R + \frac{i\pi}{2}$$

sein, und dasselbe gilt von v_0 und w_0.

Nun ist aber $\varphi'(c_1) > 0$; $\varphi'(c_2) < 0$; $\varphi'(c_3) > 0$; daher muss nach dem obigen von den beiden Grössen $\dfrac{\xi_1}{\xi_2}, \dfrac{\xi_1^0}{\xi_2^0}$, ebenso von $\dfrac{\xi_3}{\xi_2}, \dfrac{\xi_3^0}{\xi_2^0}$, die eine reell, die andre rein imaginär sein. Allein dieser Bedingung kann nicht entsprochen werden, wenn man für die Argumente nur die angegebene Wahl hat. Unsre Annahme von vier komplexen Wurzeln bei positivem $m_\nu \varphi'(c_\nu)$ $(\nu = 1, 2, 3)$ führt somit auf einen Widerspruch, aus welchem die Unmöglichkeit dieses Falles geschlossen werden muss. Es erklärt sich dies dadurch, dass die Grössen m_ν und n, von denen die s_i abhängen, nicht ganz beliebige sind. Denn aus den Gleichungen (3.) in § 3 geht hervor, dass $m_1 < 1$; $m_3 > 0$ sein muss; ausserdem ist $m_1 + m_2 + m_3 = 1$. Haben nun die m_ν in dem zulässigen Gebiet bestimmte Werte, so ist auch n^2 wiederum an ein gewisses Intervall gebunden. Dadurch reduciert sich die Anzahl der Möglichkeiten für die Beschaffenheit der Wurzeln. Das obige Resultat ergibt sich natürlich auch, wenn man nach dem Vorgang von Kötter die ξ_ν, η_ν durch ultraelliptische Funktionen eines Wertepaares z_1, z_2 darstellt. Dann müssen sich nämlich die ξ_ν^0, η_ν^0 in derselben Weise durch z_1^0, z_2^0 ausdrücken lassen, und man überzeugt sich sodann leicht von der Unmöglichkeit, z_1, z_2, z_1^0, z_2^0 so zu bestimmen, dass alle obigen Anforderungen befriedigt werden.

Nach dieser Digression gehen wir über zum zweiten der oben angegebenen Fälle; hier ist

$$d_1^2 < 0;\ d_2^2 < 0;\ d_3^2 > 0.$$

Die auf den Index $i = 2$ bezüglichen Vorzeichen seien für jedes ν gleich gewählt, so dass das Verhältnis zweier ξ_ν reell wird. Durch passende Wahl dieses Zeichens kann dann stets erreicht

werden, dass $d_1^2 d_2^2 < 1$ ist, und man erhält somit noch unter Berücksichtigung der Gleichungen (33.) in § 3

$$d_3^2 > d_4^2 > 0 > d_1^2 > d_2^2.$$

Es wird daher eine der drei letzten Nummern zum Ziel führen und es folgt etwa aus No. 13.

$$\xi_1 = \sigma\,\vartheta\begin{pmatrix}00\\00\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}10\\01\end{pmatrix}(v,w);\quad \xi_2 = -i\,\sigma\,\vartheta\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}00\\01\end{pmatrix}(v,w);\quad \xi_3 = \sigma\,\vartheta\begin{pmatrix}01\\10\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}11\\11\end{pmatrix}(v,w)$$

$$\eta_1 = \sigma\,\vartheta\begin{pmatrix}10\\01\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}00\\00\end{pmatrix}(v,w);\quad \eta_2 = -i\,\sigma\,\vartheta\begin{pmatrix}00\\01\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}(v,w);\quad \eta_3 = \sigma\,\vartheta\begin{pmatrix}11\\11\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}01\\10\end{pmatrix}(v,w)$$

und analoges für ξ_ν^0, η_ν^0. Um allen Forderungen bezüglich der $\xi_\nu, \eta_\nu, \xi_\nu^0, \eta_\nu^0$ gerecht zu werden, müssen wir setzen

$$v = R + \frac{i\pi}{2};\quad w = R$$

$$v_0 = Ri + \frac{\tau_{12}}{2};\quad w_0 = Ri + \frac{\tau_{22}}{2}.$$

Für die andern in die Lösung eingehenden Constanten findet man

$$g_1 = Ri;\quad g_2 = Ri;\quad g_3 - g_4 = R^*)$$

$$g_1' = R + \frac{i\pi}{2};\quad g_2' = R;\quad g_3' = 0^*).$$

Übrigens geht die obige Anordnung der d_ν^2 in sich selbst über, wenn d_3^2 durch den reciproken Wert ersetzt wird. Daraus ergibt sich eine zweite Lösung

$$v = R + \frac{i\pi}{2};\quad w = R + \frac{i\pi}{2}$$

$$v_0 = Ri + \frac{\tau_{11} + \tau_{12}}{2};\quad w_0 = Ri + \frac{\tau_{21} + \tau_{22}}{2}$$

$$g_1 = Ri;\quad g_2 = Ri;\quad g_3 - g_1 - g_2 = R$$

$$g_1' = R + \frac{i\pi}{2};\quad g_2' = R + \frac{i\pi}{2};\quad g_3' = 0.$$

Wir wenden uns nun der weiteren Möglichkeit zu, dass nur zwei komplexe Wurzeln vorhanden sind. Diese seien s_1 und s_2; bezüglich der ξ_ν, η_ν, D_ν gilt dann genau dasselbe wie oben. Die beiden reellen Wurzeln liegen entweder zwischen c_1 und c_2, oder zwischen c_3 und ∞.

Im ersten Fall sei

$$c_1 \leq s_4 < s_3 \leq c_2$$

und die auf den Index $i = 2$ bezüglichen Vorzeichen seien so gewählt, dass

$$\xi_1 = R\,(1-i);\quad \xi_2 = R\,(1+i);\quad \xi_3 = R\,(1+i)$$

$$\text{also } \xi_1^0 = R\,(1-i);\quad \xi_2^0 = R\,(1-i);\quad \xi_3^0 = R\,(1+i)$$

*) g_3 und g_3' ergeben sich stets aus Gleichung (21.) oder auch (24.) in § 4, indem man berücksichtigt, dass die beiden durch sie dargestellten Werte zu einander konjugiert sein müssen. Zunächst findet man $g_3' = R$; doch dies kann, wie schon Seite 28 bemerkt, durch passende Wahl der X- und Y-Achse zum Verschwinden gebracht werden.

wird. Die d_ν^2 werden dann von der Form $R^2 i$, also wenn $i d_\nu^2 = \delta_\nu$ ist für $\nu = 1, 2, 3, 4$:

$$\delta_1 < 0;\ \delta_2 < 0;\ \delta_3 < 0;\ \delta_4 > 0.$$

Demnach ergibt sich wieder mit Rücksicht auf Gleichung (33.) § 3

$$\delta_\alpha < \delta_2 < \delta_\beta < 0 < \delta_4,$$

so dass die Nummern 7—12 der Tabelle die Lösung vermitteln werden. So erhält man aus Nr. 7

$$\xi_\alpha = \sigma\,\vartheta\begin{pmatrix}01\\10\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}00\\11\end{pmatrix}(v, w);\ \xi_2 = i\,\sigma\,\vartheta\begin{pmatrix}01\\00\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}00\\01\end{pmatrix}(v, w);\ \xi_\beta = \sigma\,\vartheta\begin{pmatrix}11\\00\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}10\\01\end{pmatrix}(v, w)$$

$$\eta_\alpha = \sigma\,\vartheta\begin{pmatrix}00\\11\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}01\\10\end{pmatrix}(v, w);\ \eta_2 = i\,\sigma\,\vartheta\begin{pmatrix}00\\01\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}01\\00\end{pmatrix}(v, w);\ \eta_\beta = \sigma\,\vartheta\begin{pmatrix}10\\01\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}11\\00\end{pmatrix}(v, w).$$

Die Lösung wird, wenn $\alpha = 1$, $\beta = 3$ ist, die folgende:

$$v = R + \frac{i\,\pi}{2};\ w = R + \frac{i\,\pi}{2}$$

$$v_0 = R\,i + \frac{\tau_{11} + \tau_{12}}{2};\ w_0 = R\,i + \frac{\tau_{21} + \tau_{22}}{2}$$

$$g_1 = R\,i;\ g_2 = R\,i;\ g_3 = g_1 - g_2 = R$$

$$g_1' = R + \frac{i\,\pi}{2};\ g_2' = R + \frac{i\,\pi}{2};\ g_3' = 0.$$

Ist aber $\alpha = 3$, $\beta = 1$, so folgt

$$v = R\,i + \frac{\tau_{11} + \tau_{12}}{2};\ w = R\,i + \frac{\tau_{21} + \tau_{22}}{2}$$

$$v_0 = R + \frac{i\,\pi}{2};\ w_0 = R + \frac{i\,\pi}{2}$$

$$g_1 = R;\ g_2 = R;\ g_3 = R$$

$$g_1' = R\,i + \frac{\tau_{11} + \tau_{12}}{2};\ g_2' = R\,i + \frac{\tau_{21} + \tau_{22}}{2};\ g_3' = 0.$$

Wenn nun zweitens die beiden reellen Wurzeln zwischen e_3 und ∞ liegen, so sei wieder ε_4 die kleinere, und die Vorzeichen so bestimmt, dass

$$\xi_1 = R\,(1 - i);\ \xi_2 = R\,(1 - i);\ \xi_3 = R\,(1 - i)$$

$$\text{also } \xi_1^0 = R\,(1 - i);\ \xi_2^0 = R\,(1 + i);\ \xi_3^0 = R\,(1 - i)$$

wird. Dadurch erhält man wieder dieselbe Reihenfolge der δ_ν, aber analog wie Seite 31 überzeugt man sich leicht, dass dieser Fall gar nicht eintreten kann.

Schliesslich betrachten wir noch den Fall, das alle vier Wurzeln reell sind. Dies ist offenbar auf dreifache Weise möglich, nämlich entweder liegen alle Wurzeln zwischen e_1 und e_2, oder zwischen e_3 und ∞, oder endlich, es liegen zwei Wurzeln zwischen e_1 und e_2, die zwei andern zwischen e_3 und ∞.

Wir wollen uns zunächst der ersten Möglichkeit zuwenden, und wählen die Wurzeln in der Reihenfolge

$$c_1 \leqq s_1 < s_2 < s_3 < s_4 \leqq c_2.$$

In diesem Fall findet sich

$$\xi_1 = Ri;\ \xi_2 = R;\ \xi_3 = R;\ \eta_1 = Ri;\ \eta_2 = R;\ \eta_3 = R$$

$$\xi_1^0 = Ri;\ \xi_2^0 = Ri;\ \xi_3^0 = R;\ \eta_1^0 = Ri;\ \eta_2^0 = Ri;\ \eta_3^0 = R$$

$$D_\nu = R.$$

Die d_ν^2 werden sämtlich reell und positiv, so dass (eventuell nach Übergang zu den reciproken Werten)

$$d_\alpha^2 > d_2^2 > d_\beta^2 > d_4^2 > 0$$

gesetzt werden kann. Es folgt demnach aus No. 1 der Tabelle

$$\xi_\alpha = \sigma\,\vartheta\begin{pmatrix}01\\00\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}11\\00\end{pmatrix}(v,w);\ \xi_2 = -\,i\,\sigma\,\vartheta\begin{pmatrix}00\\00\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}(v,w);\ \xi_\beta = \sigma\,\vartheta\begin{pmatrix}00\\01\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}10\\01\end{pmatrix}(v,w)$$

$$\eta_\alpha = \sigma\,\vartheta\begin{pmatrix}11\\00\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}01\\00\end{pmatrix}(v,w);\ \eta_3 = -\,i\,\sigma\,\vartheta\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}00\\00\end{pmatrix}(v,w);\ \eta_\beta = \sigma\,\vartheta\begin{pmatrix}10\\01\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}00\\01\end{pmatrix}(v,w).$$

Für $\alpha = 1;\ \beta = 3$ hat die Lösung die Form

$$v = Ri + \frac{\tau_{12}}{2};\ w = Ri + \frac{\tau_{23}}{2};\ \text{oder}\ v = Ri + \frac{\tau_{11}+\tau_{12}}{2};\ w = Ri + \frac{\tau_{21}+\tau_{22}}{2}$$

$$v_0 = R;\ w_0 = R + \frac{i\pi}{2}$$

$$g_1 = R;\ g_2 = R;\ g_3 = R$$

$$g_1' = Ri + \frac{\tau_{12}}{2};\ g_2' = Ri + \frac{\tau_{22}}{2};\ g_3' = 0;\ \text{oder}\ g_1' = Ri + \frac{\tau_{11}+\tau_{12}}{2};\ g_2' = Ri + \frac{\tau_{21}+\tau_{22}}{2};\ g_3' = 0.$$

Dagegen folgt für $\alpha = 3;\ \beta = 1$

$$v = R;\ w = R + \frac{i\pi}{2}$$

$$v_0 = Ri + \frac{\tau_{12}}{2};\ w_0 = Ri + \frac{\tau_{22}}{2}\ \text{oder}\ v_0 = Ri + \frac{\tau_{11}+\tau_{12}}{2};\ w_0 = Ri + \frac{\tau_{21}+\tau_{22}}{2}$$

$$g_1 = Ri;\ g_2 = Ri;\ g_3 - g_2 = R;\ \text{oder}\ g_3 - g_1 - g_2 = R$$

$$g_1' = R;\ g_2' = R + \frac{i\pi}{2};\ g_3' = 0.$$

Im zweiten und dritten Fall wähle man die Wurzeln in der Weise, dass

$$c_3 \leqq s_1 < s_2 < s_3 < s_4$$

$$\text{resp. } c_1 \leqq s_1 < s_2 \leqq c_2 < c_3 \leqq s_3 < s_4$$

ist. Es ergibt sich dann leicht ähnlich wie schon früher, dass diese beiden Fälle überhaupt nicht möglich sind.

Damit sind nun alle Fälle erledigt, in denen die vier Wurzeln der Gleichung $\psi(s) = 0$ von einander verschieden sind, und wir können unser Resultat dahin zusammenfassen, dass in jedem Fall das Problem durch Thetafunktionen mit reellen Moduln gelöst werden kann. Dabei ergaben sich die Argumente in zwei Fällen als rein imaginär, in den drei andern als reell.*) Indes können nach Belieben stets Lösungen mit reellen oder mit rein imaginären Argumenten angegeben werden, wenn man nur von geeigneten andern Nummern der Tabelle Gebrauch macht.

Wenn die Gleichung $\psi(s) = 0$ zwei gleiche Wurzeln hat, so sei $s_1 = s_2$; dadurch werden bei passender Wahl der Vorzeichen die d_ν^2 sämtlich gleich 0, während ihre Quotienten endlich bleiben. Man gelangt somit zu einem der oben ausgeschlossenen Fälle, der auf elliptische Funktionen führt. Wird nun ausserdem auch $s_3 = s_4$, so entsteht ein Grenzfall des eben erwähnten, der wieder durch elliptische Funktionen zu lösen ist.

Nicht zu dieser Kategorie gehört indes der besondere Fall, wenn die Constante n verschwindet. Es ist dies dieselbe Voraussetzung, welche H. Weber macht in seiner eingangs erwähnten Arbeit über die Bewegung in einer Flüssigkeit, und auch unser Problem lässt sich nach Maassgabe der dortigen Untersuchungen behandeln. Jedoch wollen wir hier die Lösung als Grenzfall aus den allgemeinen Formeln ableiten.

Die Gleichung $\psi(s) = 0$ reduciert sich auf

$$\left(\sum_1^3{}^\nu m_\nu \frac{(s-c_1)(s-c_2)(s-c_3)}{s-c_\nu}\right)^2 = 0, \tag{1.}$$

hat also zweimal zwei gleiche Wurzeln, die wir mit x_1, x_2 bezeichnen wollen. Die Beschaffenheit derselben hängt ab von den m_ν und demzufolge haben wir vier Möglichkeiten zu unterscheiden

$$\begin{array}{ll}
\text{I.} & m_1 > 0;\ m_2 > 0;\ m_3 > 0:\ c_1 < x_1 < c_2 < x_2 < c_3 \\
\text{II.} & m_1 < 0;\ m_2 > 0;\ m_3 > 0:\ x_1 < c_1 < c_2 < x_2 < c_3 \\
\text{III.} & m_1 > 0;\ m_2 < 0;\ m_3 > 0:\ c_1 < x_1 < x_2 < c_2 < c_3 \\
\text{IV.} & m_1 < 0;\ m_2 < 0;\ m_3 > 0:\ x_1 < c_1 < x_2 < c_2 < c_3.
\end{array}$$

Alle Zeichen sind mit Ausschluss der Gleichheit zu verstehen; sonst würde das Problem wieder auf elliptische Funktionen führen.**)

Man findet nun leicht die Relation

$$(x_1 - c_\nu)(x_2 - c_\nu) = m_\nu \varphi'(c_\nu) \tag{2.}$$

und weiter, wenn man $s_1 = s_2 = x_1$; $s_3 = s_4 = x_2$ wählt,

$$\lim \frac{S_1}{S_2} = -1;\ \lim \frac{S_3}{S_4} = -1. \tag{3.}$$

*) Natürlich abgesehen von halben Perioden.

**) Vgl. Fennel: Über die Bewegung eines festen Körpers in einer tropfbaren Flüssigkeit. Inaug.-Diss. Marburg 1888. Progr. Cassel 1888.

Aus den beiden Gleichungen

$$d_\nu = \frac{\dfrac{S_3}{\sqrt{s_3 - c_\nu}\,\sqrt{\psi'(s_3)}} + i\,\dfrac{S_4}{\sqrt{s_4 - c_\nu}\,\sqrt{\psi'(s_4)}}}{\dfrac{S_1}{\sqrt{s_1 - c_\nu}\,\sqrt{\psi'(s_1)}} + i\,\dfrac{S_2}{\sqrt{s_2 - c_\nu}\,\sqrt{\psi'(s_2)}}} \quad \text{und} \quad -d_\nu^{-1} = \frac{\dfrac{\sqrt{s_3 - c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_3)}} - i\,\dfrac{\sqrt{s_4 - c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_4)}}}{\dfrac{\sqrt{s_1 - c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_1)}} - i\,\dfrac{\sqrt{s_2 - c_\nu}}{\sqrt{\psi'(s_2)}}}$$

folgt durch Division

$$d_\nu^2 = \frac{\dfrac{S_3}{\sqrt{s_3 - c_\nu}\,\sqrt{(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)}} \pm \dfrac{-S_4}{\sqrt{s_4 - c_\nu}\,\sqrt{(s_4 - s_1)(s_4 - s_2)}}}{\dfrac{\sqrt{s_3 - c_\nu}}{\sqrt{(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)}} \pm \dfrac{\sqrt{s_4 - c_\nu}}{\sqrt{(s_4 - s_1)(s_4 - s_2)}}} : \frac{\dfrac{S_1}{\sqrt{s_1 - c_\nu}\,\sqrt{(s_3 - s_1)(s_4 - s_1)}} \pm \dfrac{-S_2}{\sqrt{s_2 - c_\nu}\,\sqrt{(s_3 - s_2)(s_4 - s_2)}}}{\dfrac{\sqrt{s_1 - c_\nu}}{\sqrt{(s_3 - s_1)(s_4 - s_1)}} \pm \dfrac{\sqrt{s_2 - c_\nu}}{\sqrt{(s_3 - s_2)(s_4 - s_2)}}}.$$

Je zwei der durch doppeltes Vorzeichen verbundenen Grössen haben denselben Grenzwert; und aus den obigen Gleichungen (2.) und (3.), sowie aus (17.) in § 3 geht hervor, dass die oberen und unteren Zeichen einander entsprechen. Wählt man etwa das obere (das untere würde zum reciproken Wert führen), so folgt durch Übergang zur Grenze

$$-d_\nu^0 = \frac{s_1 - c_\nu}{s_3 - c_\nu} \cdot \frac{S_3}{S_1}$$

oder ausführlicher geschrieben

$$d_\nu^{2^-} = \frac{x_1 - c_\nu}{x_2 - c_\nu} \sqrt{\frac{(x_2 - c_1)(x_2 - c_2)(x_2 - c_3)}{(x_1 - c_1)(x_1 - c_2)(x_1 - c_3)}}. \tag{4.}$$

Dabei kann das Vorzeichen der Quadratwurzel beliebig gewählt werden, jedoch für jedes ν in gleicher Weise.

Sind nun die d_ν^2 durch Formel (4.) definiert, so ergeben sich leicht die folgenden Grenzwerte, und man sieht auch ohne weiteres, wie sich dieselben modificieren würden, wenn ein d_ν^2 durch den reciproken Wert definiert wäre.

$$\xi_\nu^0 = 0\,; \quad \eta_\nu^0 = \infty.$$

Die Constanten v_0, w_0 sind demnach halbe Perioden, die sich aus den Gleichungen bestimmen

$$\vartheta(\varepsilon_1)(v_0, w_0) = 0\,; \quad \vartheta(\varepsilon_2)(v_0, w_0) = 0\,; \quad \vartheta(\varepsilon_3)(v_0, w_0) = 0^*). \tag{5.}$$

Ausserdem findet man

$$\lim \eta_\nu \sqrt{s_1 - s_2} = \frac{2\sqrt{x_1 - c_\nu}}{(x_2 - x_1)\sqrt{\varphi'(c_\nu)}}$$

$$\lim \tau \sqrt{s_1 - s_2} = \frac{2\sqrt{x_1 - c_\nu}}{(x_2 - x_1)\sqrt{\varphi'(c_\nu)}} \cdot \frac{1}{i_\nu\,\vartheta(\varepsilon_\nu)\,\vartheta(\delta_\nu)(v_0, w_0)}$$

*) Die Existenz eines solchen Wertepaares v_0, w_0 ist bereits Seite 9 hervorgehoben worden.

und infolge dessen

$$h_\nu = 0$$

$$h'_\nu = \frac{\sqrt{(x_1 - c_1)\,(x_1 - c_2)\,(x_1 - c_3)}}{A_\nu\,(x_1 - c_\nu)} \cdot \frac{\vartheta\,(\varepsilon_\nu)\;\vartheta\,(\delta_\nu)\;(v_0, w_0)}{\vartheta\,(\delta_\nu)} \tag{6.}$$

Aus den Gleichungen (17.) in § 4 geht dann hervor

$$0 = \frac{\partial}{\partial v_0}\,\vartheta\,(\delta_\nu)\,(v_0, w_0)\;g_1 + \frac{\partial}{\partial w_0}\,\vartheta\,(\delta_\nu)\,(v_0, w_0)\;g_2 + \vartheta\,(\delta_\nu)\,(v_0, w_0)\;g_3 \tag{7.}$$

$$h'_\nu = \frac{\partial}{\partial v_0}\,\vartheta\,(\varepsilon_\nu)\,(v_0, w_0)\;g_1 + \frac{\partial}{\partial w_0}\,\vartheta\,(\varepsilon_\nu)\,(v_0, w_0)\;g_2. \tag{8.}$$

Bezeichnet man nun mit $\left(\begin{smallmatrix}\zeta_1 & \zeta_2\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{smallmatrix}\right)$ die zum Halbperiodenpaar v_0, w_0 gehörige Charakteristik, so ist zu bemerken, dass $(\varepsilon_\nu) + \left(\begin{smallmatrix}\zeta_1 & \zeta_2\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{smallmatrix}\right)$ ungerade, mithin $(\delta_\nu) + \left(\begin{smallmatrix}\zeta_1 & \zeta_2\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2\end{smallmatrix}\right)$ gerade ist. Es ist daher

$$\frac{\partial}{\partial v_0}\,\vartheta\,(\delta_\nu)\,(v_0, w_0) = -\,\zeta_1\;\vartheta\,(\delta_\nu)\,(v_0, w_0);\quad \frac{\partial}{\partial w_0}\,\vartheta\,(\delta_\nu)\,(v_0, w_0) = -\,\zeta_2\;\vartheta\,(\delta_\nu)\,(v_0, w_0),$$

wie man sich leicht durch Differentiation der Seite 7 angegebenen Formel überzeugt. Aus der Gleichung (7.) folgt aber dann

$$g_3 = \zeta_1\,g_1 + \zeta_2\,g_2$$

und durch Integration

$$i\,\omega\,(t) = \zeta_1\,v + \zeta_2\,w.$$

In den allgemeinen Formeln, die wir für $\alpha_\nu \pm i\,\beta_\nu$ und $q_1 \pm i\,q_2$ aufstellten, kommt demnach die Exponentialgrösse

$$e^{\pm\,\zeta_1\,v \pm\,\zeta_2\,w}$$

vor. Andrerseits enthalten aber die Zähler Thetafunktionen mit den Argumenten $v \pm v_0$, $w \pm w_0$, und indem man diese auf solche mit den einfachen Argumenten v, w reduciert, sondert sich der Exponentialfaktor

$$e^{\mp\,\zeta_1\,v \mp\,\zeta_2\,w}$$

ab. Nach dieser Reduktion wird daher das Resultat von Exponentialgrössen frei werden.

Sehen wir nun zu, wie sich die Lösung im einzelnen gestaltet. Im Fall I setzen wir

$$d_1^2 = \frac{x_2 - c_1}{x_1 - c_1}\sqrt{\frac{(x_1 - c_1)\,(x_1 - c_2)\,(x_1 - c_3)}{(x_2 - c_1)\,(x_2 - c_2)\,(x_2 - c_3)}}$$

$$d_2^2 = \frac{x_1 - c_2}{x_2 - c_2}\sqrt{\frac{(x_2 - c_1)\,(x_2 - c_2)\,(x_2 - c_3)}{(x_1 - c_1)\,(x_1 - c_2)\,(x_1 - c_3)}}$$

$$d_3^2 = \frac{x_2 - c_3}{x_1 - c_3}\sqrt{\frac{(x_1 - c_1)\,(x_1 - c_2)\,(x_1 - c_3)}{(x_2 - c_1)\,(x_2 - c_2)\,(x_2 - c_3)}};$$

die d_ν^2 sind rein imaginär und bei passender Wahl des Zeichens der Quadratwurzel

$$\delta_1 < \delta_2 < \delta_3 < 0 < \delta_4.$$

Indem man die No. 7 der Tabelle benutzt, erhält man

$$\vartheta\begin{pmatrix}01\\10\end{pmatrix}(v_0, w_0) = 0\,;\quad \vartheta\begin{pmatrix}00\\01\end{pmatrix}(v_0, w_0) = 0\,;\quad \vartheta\begin{pmatrix}11\\00\end{pmatrix}(v_0, w_0) = 0,$$

also

$$v_0 = \frac{i\pi}{2} + \frac{\tau_{11}}{2}\,;\quad w_0 = \frac{i\pi}{2} + \frac{\tau_{21}}{2}.$$

Die Moduln bestimmen sich aus den Gleichungen

$$d_1^2 = i\,\frac{\vartheta^2\begin{pmatrix}00\\11\end{pmatrix}}{\vartheta^2\begin{pmatrix}01\\10\end{pmatrix}};\quad d_2^2 = i\,\frac{\vartheta^2\begin{pmatrix}00\\01\end{pmatrix}}{\vartheta^2\begin{pmatrix}01\\00\end{pmatrix}};\quad d_3^2 = i\,\frac{\vartheta^2\begin{pmatrix}10\\01\end{pmatrix}}{\vartheta^2\begin{pmatrix}11\\00\end{pmatrix}};$$

ferner die Constanten g_1, g_2 aus

$$\frac{\sqrt{(x_1-c_1)(x_1-c_2)(x_1-c_3)}}{A_1(x_1-c_1)}\,\frac{\vartheta\begin{pmatrix}01\\10\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}}{\vartheta\begin{pmatrix}00\\11\end{pmatrix}} = \frac{\partial}{\partial v}\vartheta\begin{pmatrix}11\\01\end{pmatrix}g_1 + \frac{\partial}{\partial w}\vartheta\begin{pmatrix}11\\01\end{pmatrix}g_2$$

$$\frac{\sqrt{(x_1-c_1)(x_1-c_2)(x_1-c_3)}}{A_2(x_1-c_2)}\,\frac{\vartheta\begin{pmatrix}00\\01\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}11\\11\end{pmatrix}}{\vartheta\begin{pmatrix}01\\00\end{pmatrix}} = \frac{\partial}{\partial v}\vartheta\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}g_1 + \frac{\partial}{\partial w}\vartheta\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}g_2$$

$$\frac{\sqrt{(x_1-c_1)(x_1-c_2)(x_1-c_3)}}{A_3(x_1-c_3)}\,\frac{\vartheta\begin{pmatrix}11\\00\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}00\\10\end{pmatrix}}{\vartheta\begin{pmatrix}10\\01\end{pmatrix}} = \frac{\partial}{\partial v}\vartheta\begin{pmatrix}01\\11\end{pmatrix}g_1 + \frac{\partial}{\partial w}\vartheta\begin{pmatrix}01\\11\end{pmatrix}g_2;$$

g_1, g_2 sind demnach rein imaginär. Aus der Realität der γ_ν, p_ν findet man weiter, dass $v = R + \frac{i\pi}{2}$, $w = R$ ist, und wenn man schliesslich im Resultat die Charakteristiken derart ändert, dass der imaginäre Teil von v wegfällt, so ergibt sich die Lösung in folgender Form

$$\alpha_1 = -i\,\frac{\vartheta\begin{pmatrix}01\\10\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}(v,w)}{\vartheta\begin{pmatrix}00\\00\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}11\\00\end{pmatrix}(v,w)};\quad \alpha_2 = -i\,\frac{\vartheta\begin{pmatrix}00\\01\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}11\\01\end{pmatrix}(v,w)}{\vartheta\begin{pmatrix}00\\00\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}11\\00\end{pmatrix}(v,w)};\quad \alpha_3 = -\,\frac{\vartheta\begin{pmatrix}11\\00\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}00\\00\end{pmatrix}(v,w)}{\vartheta\begin{pmatrix}00\\00\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}11\\00\end{pmatrix}(v,w)}$$

$$\beta_1 = \frac{\vartheta\begin{pmatrix}00\\11\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}11\\11\end{pmatrix}(v,w)}{\vartheta\begin{pmatrix}00\\00\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}11\\00\end{pmatrix}(v,w)};\quad \beta_2 = \frac{\vartheta\begin{pmatrix}01\\00\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}(v,w)}{\vartheta\begin{pmatrix}00\\00\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}11\\00\end{pmatrix}(v,w)};\quad \beta_3 = -i\,\frac{\vartheta\begin{pmatrix}10\\01\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}01\\01\end{pmatrix}(v,w)}{\vartheta\begin{pmatrix}00\\00\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}11\\00\end{pmatrix}(v,w)}$$

$$\gamma_1 = \frac{\vartheta\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}01\\00\end{pmatrix}(v,w)}{\vartheta\begin{pmatrix}00\\00\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}11\\00\end{pmatrix}(v,w)};\quad \gamma_2 = -\,\frac{\vartheta\begin{pmatrix}11\\11\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}00\\11\end{pmatrix}(v,w)}{\vartheta\begin{pmatrix}00\\00\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}11\\00\end{pmatrix}(v,w)};\quad \gamma_3 = -i\,\frac{\vartheta\begin{pmatrix}00\\10\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}11\\10\end{pmatrix}(v,w)}{\vartheta\begin{pmatrix}00\\00\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}11\\00\end{pmatrix}(v,w)}$$

$$p_1 = -\frac{\Delta\,\vartheta\binom{11}{01}\,\vartheta\binom{00}{01}(v,w)}{\vartheta\binom{00}{00}\,\vartheta\binom{11}{00}(v,w)};\quad p_2 = \frac{\Delta\,\vartheta\binom{10}{10}\,\vartheta\binom{01}{10}(v,w)}{\vartheta\binom{00}{00}\,\vartheta\binom{11}{00}(v,w)};\quad p_3 = i\frac{\Delta\,\vartheta\binom{01}{11}\,\vartheta\binom{10}{11}(v,w)}{\vartheta\binom{00}{00}\,\vartheta\binom{11}{00}(v,w)}$$

$$q_1 = -i\frac{\Delta\,\vartheta\binom{10}{11}\,\vartheta\binom{01}{11}(v,w)}{\vartheta\binom{00}{00}\,\vartheta\binom{11}{00}(v,w)};\quad q_2 = \frac{\Delta\,\vartheta\binom{11}{10}\,\vartheta\binom{00}{10}(v,w)}{\vartheta\binom{00}{00}\,\vartheta\binom{11}{00}(v,w)};\quad q_3 = -\frac{\Delta\,\vartheta\binom{01}{01}\,\vartheta\binom{10}{01}(v,w)}{\vartheta\binom{00}{00}\,\vartheta\binom{11}{00}(v,w)}.$$

Im Falle II setze man

$$d_1^2 = \frac{x_1 - c_1}{x_2 - c_1}\sqrt{\frac{(x_2 - c_1)(x_2 - c_2)(x_2 - c_3)}{(x_1 - c_1)(x_1 - c_2)(x_1 - c_3)}}$$

$$d_2^2 = \frac{x_2 - c_2}{x_1 - c_2}\sqrt{\frac{(x_1 - c_1)(x_1 - c_2)(x_1 - c_3)}{(x_2 - c_1)(x_2 - c_2)(x_2 - c_3)}}$$

$$d_3^2 = \frac{x_2 - c_3}{x_1 - c_3}\sqrt{\frac{(x_1 - c_1)(x_1 - c_2)(x_1 - c_3)}{(x_2 - c_1)(x_2 - c_2)(x_2 - c_3)}},$$

woraus folgt

$$d_2^2 < d_1^2 < 0 < d_4^2 < d_3^2.$$

Mit Benutzung von No. 15 der Tabelle erhält man

$$d_1^2 = -\frac{\vartheta^2\binom{11}{11}}{\vartheta^2\binom{00}{00}};\quad d_2^2 = -\frac{\vartheta^2\binom{11}{00}}{\vartheta^2\binom{00}{11}};\quad d_3^2 = \frac{\vartheta^2\binom{01}{10}}{\vartheta^2\binom{10}{01}}$$

$$v_0 = \frac{\tau_{12}}{2};\quad w_0 = \frac{\tau_{22}}{2}$$

$$\sqrt{\frac{(x_1 - c_1)(x_1 - c_2)(x_1 - c_3)}{A_1(x_1 - c_1)}}\;\frac{\vartheta\binom{11}{11}\,\vartheta\binom{01}{00}}{\vartheta\binom{00}{00}} = -i\frac{\partial}{\partial v}\vartheta\binom{10}{11}g_1 - i\frac{\partial}{\partial w}\vartheta\binom{10}{11}g_2$$

$$\sqrt{\frac{(x_1 - c_1)(x_1 - c_2)(x_1 - c_3)}{A_2(x_1 - c_2)}}\;\frac{\vartheta\binom{00}{11}\,\vartheta\binom{10}{00}}{\vartheta\binom{11}{00}} = -i\frac{\partial}{\partial v}\vartheta\binom{01}{11}g_1 - i\frac{\partial}{\partial w}\vartheta\binom{01}{11}g_2$$

$$\sqrt{\frac{(x_1 - c_1)(x_1 - c_2)(x_1 - c_3)}{A_3(x_1 - c_3)}}\;\frac{\vartheta\binom{10}{01}\,\vartheta\binom{00}{10}}{\vartheta\binom{01}{10}} = -i\frac{\partial}{\partial v}\vartheta\binom{11}{01}g_1 - i\frac{\partial}{\partial w}\vartheta\binom{11}{01}g_2;$$

g_1, g_2 sind also wieder rein imaginär, und man findet $v = R + \frac{i\pi}{2}$; $w = R$. Wenn man dann wieder durch Aenderung der Charakteristiken den imaginären Teil von v beseitigt, findet man die nachstehenden Formeln

$$\alpha_1 = -\frac{\vartheta\begin{pmatrix}11\\11\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}01\\10\end{pmatrix}(v,w)}{\vartheta\begin{pmatrix}00\\01\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}(v,w)};\quad \alpha_2 = -i\frac{\vartheta\begin{pmatrix}00\\11\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}(v,w)}{\vartheta\begin{pmatrix}00\\01\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}(v,w)};\quad \alpha_3 = -\frac{\vartheta\begin{pmatrix}10\\01\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}00\\00\end{pmatrix}(v,w)}{\vartheta\begin{pmatrix}00\\01\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}(v,w)}$$

$$\beta_1 = -\frac{\vartheta\begin{pmatrix}00\\00\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}10\\01\end{pmatrix}(v,w)}{\vartheta\begin{pmatrix}00\\01\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}(v,w)};\quad \beta_2 = -i\frac{\vartheta\begin{pmatrix}11\\00\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}01\\01\end{pmatrix}(v,w)}{\vartheta\begin{pmatrix}00\\01\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}(v,w)};\quad \beta_3 = -\frac{\vartheta\begin{pmatrix}01\\10\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}11\\11\end{pmatrix}(v,w)}{\vartheta\begin{pmatrix}00\\01\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}(v,w)}$$

$$\gamma_1 = -i\frac{\vartheta\begin{pmatrix}01\\00\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}11\\01\end{pmatrix}(v,w)}{\vartheta\begin{pmatrix}00\\01\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}(v,w)};\quad \gamma_2 = \frac{\vartheta\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}00\\01\end{pmatrix}(v,w)}{\vartheta\begin{pmatrix}00\\01\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}(v,w)};\quad \gamma_3 = -i\frac{\vartheta\begin{pmatrix}00\\10\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}10\\11\end{pmatrix}(v,w)}{\vartheta\begin{pmatrix}00\\01\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}(v,w)}$$

$$p_1 = -\frac{J\vartheta\begin{pmatrix}10\\11\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}00\\10\end{pmatrix}(v,w)}{\vartheta\begin{pmatrix}00\\01\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}(v,w)};\quad p_2 = i\frac{J\vartheta\begin{pmatrix}01\\11\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}11\\10\end{pmatrix}(v,w)}{\vartheta\begin{pmatrix}00\\01\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}(v,w)};\quad p_3 = \frac{J\vartheta\begin{pmatrix}11\\01\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}01\\00\end{pmatrix}(v,w)}{\vartheta\begin{pmatrix}00\\01\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}(v,w)}$$

$$q_1 = -\frac{J\vartheta\begin{pmatrix}01\\01\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}11\\00\end{pmatrix}(v,w)}{\vartheta\begin{pmatrix}00\\01\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}(v,w)};\quad q_2 = \frac{J\vartheta\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}00\\11\end{pmatrix}(v,w)}{\vartheta\begin{pmatrix}00\\01\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}(v,w)};\quad q_3 = i\frac{J\vartheta\begin{pmatrix}11\\10\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}01\\11\end{pmatrix}(v,w)}{\vartheta\begin{pmatrix}00\\01\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}(v,w)}.$$

Im Fall III wähle man die d_ν^2 ebenso wie bei II. Die Reihenfolge wird dann

$$d_3^2 > d_2^2 > d_1^2 > d_4^2 > 0.$$

Wir wählen No. 1 der Tabelle und erhalten*)

$$d_1^2 = \frac{\vartheta^2\begin{pmatrix}10\\01\end{pmatrix}}{\vartheta^2\begin{pmatrix}00\\01\end{pmatrix}};\quad d_2^2 = \frac{\vartheta^2\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}}{\vartheta^2\begin{pmatrix}00\\00\end{pmatrix}};\quad d_3^2 = \frac{\vartheta^2\begin{pmatrix}11\\00\end{pmatrix}}{\vartheta^2\begin{pmatrix}01\\00\end{pmatrix}}$$

$$v_0 = \frac{i\pi}{2} + \frac{\tau_{11}+\tau_{12}}{2};\quad w_0 = \frac{\tau_{21}+\tau_{22}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{(x_1-c_1)(x_1-c_2)(x_1-c_3)}}{A_1(x_1-c_1)}\frac{\vartheta\begin{pmatrix}10\\01\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}11\\11\end{pmatrix}}{\vartheta\begin{pmatrix}00\\01\end{pmatrix}} = \frac{\partial}{\partial v}\vartheta\begin{pmatrix}01\\11\end{pmatrix}g_1 + \frac{\partial}{\partial w}\vartheta\begin{pmatrix}01\\11\end{pmatrix}g_2$$

$$\frac{\sqrt{(x_1-c_1)(x_1-c_2)(x_1-c_3)}}{A_2(x_1-c_2)}\frac{\vartheta\begin{pmatrix}00\\00\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}01\\10\end{pmatrix}}{\vartheta\begin{pmatrix}10\\00\end{pmatrix}} = \frac{\partial}{\partial v}\vartheta\begin{pmatrix}11\\10\end{pmatrix}g_1 + \frac{\partial}{\partial w}\vartheta\begin{pmatrix}11\\10\end{pmatrix}g_2$$

$$\frac{\sqrt{(x_1-c_1)(x_1-c_2)(x_1-c_3)}}{A_3(x_1-c_3)}\frac{\vartheta\begin{pmatrix}01\\00\end{pmatrix}\vartheta\begin{pmatrix}00\\10\end{pmatrix}}{\vartheta\begin{pmatrix}11\\00\end{pmatrix}} = \frac{\partial}{\partial v}\vartheta\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}g_1 + \frac{\partial}{\partial w}\vartheta\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}g_2.$$

*) Dabei ist zu beachten, dass die Indices 1 und 3 vertauscht sind.

Demnach sind g_1, g_2 wieder rein imaginär, doch ist diesmal $v = R$; $w = R + \frac{i\pi}{2}$. Nach Beseitigung des imaginären Bestandteils ergibt sich

$$\alpha_1 = i\,\frac{\vartheta\binom{10}{01}\vartheta\binom{11}{10}(v,w)}{\vartheta\binom{00}{11}\vartheta\binom{01}{00}(v,w)};\quad \alpha_2 = i\,\frac{\vartheta\binom{00}{00}\vartheta\binom{01}{11}(v,w)}{\vartheta\binom{00}{11}\vartheta\binom{01}{00}(v,w)};\quad \alpha_3 = -\,\frac{\vartheta\binom{01}{00}\vartheta\binom{00}{11}(v,w)}{\vartheta\binom{00}{11}\vartheta\binom{01}{00}(v,w)}$$

$$\beta_1 = -\,\frac{\vartheta\binom{00}{01}\vartheta\binom{01}{10}(v,w)}{\vartheta\binom{00}{11}\vartheta\binom{01}{00}(v,w)};\quad \beta_2 = -\,\frac{\vartheta\binom{10}{00}\vartheta\binom{11}{11}(v,w)}{\vartheta\binom{00}{11}\vartheta\binom{01}{00}(v,w)};\quad \beta_3 = -\,i\,\frac{\vartheta\binom{11}{00}\vartheta\binom{10}{11}(v,w)}{\vartheta\binom{00}{11}\vartheta\binom{01}{00}(v,w)}$$

$$\gamma_1 = \frac{\vartheta\binom{11}{11}\vartheta\binom{10}{00}(v,w)}{\vartheta\binom{00}{11}\vartheta\binom{01}{00}(v,w)};\quad \gamma_2 = -\,\frac{\vartheta\binom{01}{10}\vartheta\binom{00}{01}(v,w)}{\vartheta\binom{00}{11}\vartheta\binom{01}{00}(v,w)};\quad \gamma_3 = -\,i\,\frac{\vartheta\binom{00}{10}\vartheta\binom{01}{01}(v,w)}{\vartheta\binom{00}{11}\vartheta\binom{01}{00}(v,w)}$$

$$p_1 = -\,\frac{\Delta\vartheta\binom{01}{11}\vartheta\binom{00}{00}(v,w)}{\vartheta\binom{00}{11}\vartheta\binom{01}{00}(v,w)};\quad p_2 = \frac{\Delta\vartheta\binom{11}{10}\vartheta\binom{10}{01}(v,w)}{\vartheta\binom{00}{11}\vartheta\binom{01}{00}(v,w)};\quad p_3 = i\,\frac{\Delta\vartheta\binom{10}{10}\vartheta\binom{11}{01}(v,w)}{\vartheta\binom{00}{11}\vartheta\binom{01}{00}(v,w)}$$

$$q_1 = -\,i\,\frac{\Delta\vartheta\binom{11}{01}\vartheta\binom{10}{10}(v,w)}{\vartheta\binom{00}{11}\vartheta\binom{01}{00}(v,w)};\quad q_2 = \frac{\Delta\vartheta\binom{01}{01}\vartheta\binom{00}{10}(v,w)}{\vartheta\binom{00}{11}\vartheta\binom{01}{00}(v,w)};\quad q_3 = -\,\frac{\Delta\vartheta\binom{10}{11}\vartheta\binom{11}{00}(v,w)}{\vartheta\binom{00}{11}\vartheta\binom{01}{00}(v,w)}.$$

Um endlich Fall IV zu erledigen, bestimmen wir die d_ν^2 ebenso wie in II und III. Dieselben werden dann rein imaginär und haben die Anordnung

$$\delta_3 < \delta_2 < \delta_1 < 0 < \delta_4.$$

Man erhält also aus No. 9 der Tabelle*)

$$d_1^2 = i\,\frac{\vartheta^2\binom{01}{10}}{\vartheta^2\binom{00}{01}};\quad d_2^2 = i\,\frac{\vartheta^2\binom{01}{00}}{\vartheta^2\binom{00}{11}};\quad d_3^2 = i\,\frac{\vartheta^2\binom{10}{00}}{\vartheta^2\binom{11}{11}}$$

$$v_0 = \frac{\tau_{11}}{2};\quad w_0 = \frac{\tau_{21}}{2}$$

$$\sqrt{\frac{(x_1-c_1)(x_1-c_2)(x_1-c_3)}{A_1(x_1-c_1)}}\,\frac{\vartheta\binom{01}{10}\vartheta\binom{10}{01}}{\vartheta\binom{00}{01}} = -\,i\,\frac{\partial}{\partial v}\vartheta\binom{11}{10}g_1 - i\,\frac{\partial}{\partial w}\vartheta\binom{11}{10}g_2$$

$$\sqrt{\frac{(x_1-c_1)(x_1-c_2)(x_1-c_3)}{A_2(x_1-c_2)}}\,\frac{\vartheta\binom{00}{11}\vartheta\binom{11}{00}}{\vartheta\binom{01}{00}} = -\,i\,\frac{\partial}{\partial v}\vartheta\binom{10}{11}g_1 - i\,\frac{\partial}{\partial w}\vartheta\binom{10}{11}g_2$$

*) Es ist wieder auf die Vertauschung der Indices 1 und 3 zu achten.

$$\frac{\sqrt{(x_1-c_1)(x_1-c_2)(x_1-c_3)}}{A_3(x_1-c_3)}\,\frac{\vartheta\binom{11}{11}\vartheta\binom{00}{00}}{\vartheta\binom{10}{00}} = -i\frac{\partial}{\partial v}\vartheta\binom{01}{11}g_1 - i\frac{\partial}{\partial w}\vartheta\binom{01}{11}g_2;$$

g_1, g_2 sind wieder rein imaginär und zwar $v = R$; $w = R + \frac{i\pi}{2}$. Indem man auch hier den imaginären Bestandteil beseitigt, findet man

$$\alpha_1 = \frac{\vartheta\binom{01}{10}\vartheta\binom{10}{00}(v,w)}{\vartheta\binom{00}{10}\vartheta\binom{11}{00}(v,w)};\quad \alpha_2 = -i\frac{\vartheta\binom{00}{11}\vartheta\binom{11}{01}(v,w)}{\vartheta\binom{00}{10}\vartheta\binom{11}{00}(v,w)};\quad \alpha_3 = -\frac{\vartheta\binom{11}{11}\vartheta\binom{00}{01}(v,w)}{\vartheta\binom{00}{10}\vartheta\binom{11}{00}(v,w)}$$

$$\beta_1 = \frac{\vartheta\binom{00}{01}\vartheta\binom{11}{11}(v,w)}{\vartheta\binom{00}{10}\vartheta\binom{11}{00}(v,w)};\quad \beta_2 = -i\frac{\vartheta\binom{01}{00}\vartheta\binom{10}{10}(v,w)}{\vartheta\binom{00}{10}\vartheta\binom{11}{00}(v,w)};\quad \beta_3 = \frac{\vartheta\binom{10}{00}\vartheta\binom{01}{10}(v,w)}{\vartheta\binom{00}{10}\vartheta\binom{11}{00}(v,w)}$$

$$\gamma_1 = i\frac{\vartheta\binom{10}{01}\vartheta\binom{01}{11}(v,w)}{\vartheta\binom{00}{10}\vartheta\binom{11}{00}(v,w)};\quad \gamma_2 = -\frac{\vartheta\binom{11}{00}\vartheta\binom{00}{10}(v,w)}{\vartheta\binom{00}{10}\vartheta\binom{11}{00}(v,w)};\quad \gamma_3 = i\frac{\vartheta\binom{00}{00}\vartheta\binom{11}{10}(v,w)}{\vartheta\binom{00}{10}\vartheta\binom{11}{00}(v,w)}$$

$$p_1 = -\frac{J\vartheta\binom{11}{10}\vartheta\binom{00}{00}(v,w)}{\vartheta\binom{00}{10}\vartheta\binom{11}{00}(v,w)};\quad p_2 = i\frac{J\vartheta\binom{10}{11}\vartheta\binom{01}{01}(v,w)}{\vartheta\binom{00}{10}\vartheta\binom{11}{00}(v,w)};\quad p_3 = \frac{J\vartheta\binom{01}{11}\vartheta\binom{10}{01}(v,w)}{\vartheta\binom{00}{10}\vartheta\binom{11}{00}(v,w)}$$

$$q_1 = -\frac{J\vartheta\binom{10}{10}\vartheta\binom{01}{00}(v,w)}{\vartheta\binom{00}{10}\vartheta\binom{11}{00}(v,w)};\quad q_2 = \frac{J\vartheta\binom{11}{01}\vartheta\binom{00}{11}(v,w)}{\vartheta\binom{00}{10}\vartheta\binom{11}{00}(v,w)};\quad q_3 = i\frac{J\vartheta\binom{01}{01}\vartheta\binom{10}{11}(v,w)}{\vartheta\binom{00}{10}\vartheta\binom{11}{00}(v,w)}.$$

An die beiden letzten Fälle knüpft sich noch eine kurze Bemerkung. Bei der Herleitung der allgemeinen Formeln für die Richtungscosinus α_ν, β_ν machten wir den Ansatz

$$(\alpha_\nu \pm i\beta_\nu) = (\alpha_\nu^0 \pm i\beta_\nu^0)\, e^{\pm i\lambda}.$$

Dabei genügten die α_ν^0, β_ν^0 der Gleichung

$$\alpha_1^0 = +(\beta_2^0\gamma_3 - \beta_3^0\gamma_2). \qquad (a)$$

Hieraus folgt, dass die positiven Richtungen des beweglichen Coordinatensystems Ξ, H, Z mit den positiven Richtungen des festen X, Y, Z durch Drehung zur Deckung gebracht werden können.

Bei den Fällen III und IV sind aber die Indices 1 und 3 mit einander vertauscht, so dass man

$$\alpha_3 = +(\beta_2\gamma_1 - \beta_1\gamma_2)$$

$$\text{folglich } \alpha_1 = -(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) \qquad (b)$$

erhält, wovon man sich auch leicht durch Einsetzen der gefundenen Werte überzeugen kann.

Die Gleichung (a) ergab sich auf Grund der Relationen (10.) in § 2. Diese gehen durch Vertauschung der Indices 1 und 3 in sich selbst über, sowie man zugleich einer der Grössen T_ν, also einem i_ν das entgegengesetzte Zeichen gibt. Will man also erreichen, dass die positiven Achsenrichtungen in beiden Coordinatensystemen zur Deckung gebracht werden können, so ist etwa i_2 durch $-i_2$ zu ersetzen; dadurch ändern aber auch α_2, β_2, γ_2, p_2 ihr Zeichen.

Die Lösungen der letzten vier Fälle haben das gemeinsame, dass die Argumente der Thetafunktionen reell sind; indes auch hier lassen sich stets wieder Darstellungen finden mit rein imaginären Argumenten.

Fassen wir alles zusammen, so sind im ganzen neun Fälle zu unterscheiden, in denen das Problem auf Thetafunktionen mit zwei Variabeln führt. Dabei sind sechs Fälle zu verzeichnen, in denen sich die Lösung auf sechs verschiedene Arten darstellen lässt, nämlich wenn

$$\delta_\alpha < \delta_\beta < \delta_\gamma < 0 < \delta_4$$
$$\text{oder } d_\alpha^2 < d_\beta^2 < 0 < d_4^2 < d_\gamma^2$$

ist. Denn für den ersten Fall liefert die Tabelle unmittelbar sechs Darstellungen; für den zweiten allerdings nur drei, jedoch kommen drei weitere hinzu durch die Bemerkung, dass man d_γ^2 durch den reciproken Wert ersetzen darf, ohne die obige Reihenfolge zu ändern.

In den drei andern Fällen ist

$$d_\alpha^2 > d_\beta^2 > d_\gamma^2 > d_4^2 > 0$$

und dann gibt es zwölf verschiedene Darstellungen für die Lösung. Denn zu den sechs, die aus der Tabelle hervorgehen, treten weitere sechs dadurch, dass diese Ungleichungen wieder in sich selbst übergehen, wenn an Stelle von d_α^2 der reciproke Wert tritt.

In jedem Fall teilen sich indes die verschiedenen Formen, in denen sich die Lösung darstellen lässt, in zwei Gruppen, deren eine aus der andern einfach dadurch hervorgeht, dass die Funktionen

$$\vartheta \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{pmatrix} (v, w, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})$$

ersetzt werden durch

$$\vartheta \begin{pmatrix} g_2 & g_1 \\ h_2 & h_1 \end{pmatrix} (w, v, \tau_{22}, \tau_{21}, \tau_{22}).$$

Die beiden Gruppen sind daher nicht wesentlich von einander verschieden.